



# Techniques de démodulation aveugle en interception de signaux MIMO

Steredenn Daumont

## ► To cite this version:

Steredenn Daumont. Techniques de démodulation aveugle en interception de signaux MIMO. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université Rennes 1, 2009. Français. NNT: . tel-00441830

**HAL Id: tel-00441830**

**<https://theses.hal.science/tel-00441830>**

Submitted on 17 Dec 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1  
*sous le sceau de l'Université Européenne de Bretagne*

pour le grade de  
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

*Mention : Traitement du signal et télécommunication*

Ecole doctorale MATISSE

présentée par

**Steredenn DAUMONT**

préparée à l'unité de recherche : SCEE-SUPELEC/IETR  
UMR 6164

Institut d'Electronique et de Télécommunication de Rennes  
Composante universitaire : S.P.M.

---

Techniques de  
démodulation aveugle  
en interception  
de signaux MIMO

Thèse soutenue à Supélec-Rennes  
le 04 décembre 2009

devant le jury composé de :

**Pascal SCALART**

Professeur, Université de Rennes 1, ENSSAT,  
président

**Constantinos PAPADIAS**

Professeur, Athens Information Technology,  
rapporteur

**Gilles BUREL**

Professeur, Université de Bretagne Occidentale,  
rapporteur

**Denys BOITEAU**

Ingénieur, IPSIS, examinateur

**Jacques PALICOT**

Professeur, Supélec, Campus de Rennes,  
directeur de thèse

**Daniel LE GUENNEC**

Professeur, Supélec, Campus de Rennes,  
co-directeur de thèse



# Remerciements

Tout d'abord, je remercie Jacques PALICOT, Professeur à Supélec Rennes campus de Rennes, responsable de l'équipe SCEE, de m'avoir accueillie dans son équipe et d'avoir accepté d'être le directeur de ma thèse, Daniel LE GUENNEC pour son encadrement éclairé durant ces trois années, sa confiance, sa disponibilité et son soutien qui m'ont permis de mener à bien cette thèse.

Je tiens à remercier les membres du jury pour s'être déplacés parfois de loin. Gilles BUREL, professeur à l'université de Bretagne Occidentale, et Constantinos PAPADIAS, professeur à l'université technologique d'Athènes, pour avoir accepté d'être les rapporteurs de ma thèse. Pascal SCALART, professeur à l'université de Rennes 1 et à l'ENSSAT, de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse. Et enfin, Denys BOITEAU, Ingénieur à IPSIS pour avoir accepté de participer au jury de thèse.

Je remercie également la Société IPSIS ainsi que la DGA pour la confiance qu'ils m'ont accordée en finançant les trois années de ma thèse dans le cadre d'une convention CIFRE aidée par l'ANRT. Je remercie l'IETR et notamment les membres de l'équipe SCEE, doctorants, post-doctorants et enseignants chercheurs. La société IPSIS et l'équipe SCEE ont su contribuer au financement de mes conférences et de mes articles de revues à travers un partenariat industriel-académique réussi.

Je tiens à remercier l'ENSSAT, mon école d'ingénieur, qui m'a permis de poursuivre en doctorat grâce à l'aménagement du Master 2 recherche effectué en parallèle de ma troisième année, ainsi qu'à la confiance d'Olivier SENTIEYS, professeur à l'université de Rennes 1 et à l'ENSSAT, pour m'avoir autorisée à poursuivre dans cette voie.

Je remercie enfin ma famille et mon mari Romain pour leur soutien.



# Table des matières

Remerciements	iii
Table des matières	v
Acronymes et abréviations	ix
Notations	xi
Table des figures	xiii
Liste des tableaux	xv
Introduction	1
<b>1 Les systèmes MIMO</b>	<b>5</b>
1.1 Les transmissions MIMO . . . . .	5
1.1.1 Modèle théorique . . . . .	5
1.1.2 Canaux de transmission . . . . .	6
1.1.2.1 Le bruit additif blanc gaussien complexe $b(k)$ . . . . .	6
1.1.2.2 Les évanouissements sélectifs en fréquence . . . . .	7
1.1.2.3 Les évanouissements sélectifs en temps . . . . .	9
1.1.2.4 Modélisation des atténuations . . . . .	11
1.1.3 Notion de diversité . . . . .	13
1.1.3.1 La diversité spatiale . . . . .	14
1.1.3.2 La diversité temporelle . . . . .	14
1.1.3.3 La diversité fréquentielle . . . . .	15
1.2 Les techniques MIMO . . . . .	15
1.2.1 Les techniques à multiplexage spatial . . . . .	15
1.2.1.1 Architecture H-BLAST . . . . .	15
1.2.1.2 Architecture V-BLAST . . . . .	16
1.2.1.3 Architecture D-BLAST . . . . .	17
1.2.2 Critère de construction des codes espace-temps . . . . .	17
1.2.3 Les codes espace-temps orthogonaux . . . . .	19
1.2.3.1 Code d'Alamouti . . . . .	20
1.2.3.2 Code de Tarokh . . . . .	20
1.2.4 Le code d'Or . . . . .	21
1.3 Algorithmes de décodage associés aux techniques MIMO . . . . .	21

1.3.1	L'égaliseur de forçage à zéro (ZF) . . . . .	22
1.3.2	L'égaliseur minimisant l'erreur quadratique moyenne (MMSE) . . . .	22
1.3.3	L'égaliseur à annulations successives d'interférences ordonnées . . . .	22
1.3.4	L'égaliseur à Maximum de Vraisemblance . . . . .	23
1.3.5	Le décodage par sphère . . . . .	24
1.3.6	Performances . . . . .	24
1.4	Contexte de la thèse : l'interception . . . . .	25
1.4.1	Estimation du nombre d'antennes émettrices . . . . .	25
1.4.2	Reconnaissance du code MIMO . . . . .	25
1.4.3	Reconnaissance de la modulation . . . . .	26
1.4.4	L'estimation des symboles transmis . . . . .	26
1.5	Conclusion . . . . .	26
<b>2</b>	<b>La séparation aveugle de sources</b>	<b>27</b>
2.1	Principe . . . . .	27
2.2	Hypothèses . . . . .	28
2.3	Indéterminations . . . . .	29
2.4	Pré et post traitements . . . . .	29
2.4.1	Le blanchiment . . . . .	29
2.4.1.1	Le blanchiment par blocs . . . . .	30
2.4.1.2	Le blanchiment adaptatif . . . . .	30
2.4.2	Décorrélation et orthogonalisation . . . . .	32
2.4.2.1	Décorrélation . . . . .	32
2.4.2.2	Orthogonalisation . . . . .	33
2.5	Fonctions de contraste utilisées pour la séparation . . . . .	35
2.5.1	La séparation par analyse en composantes indépendantes . . . . .	35
2.5.1.1	Un critère basé sur le Kurtosis . . . . .	36
2.5.1.2	L'algorithme MUK . . . . .	37
2.5.2	Les fonctions de contraste à module constant . . . . .	37
2.5.2.1	L'algorithme SG-CMA à pas fixe . . . . .	38
2.5.2.2	L'algorithme SG-CMA à pas variable . . . . .	39
2.5.2.3	L'algorithme RLS-CMA . . . . .	39
2.5.2.4	L'algorithme batch ACMA . . . . .	40
2.5.2.5	L'algorithme adaptatif ACMA . . . . .	40
2.5.2.6	Autres algorithmes . . . . .	40
2.5.3	La fonction de contraste MultiModulus . . . . .	41
2.5.4	La fonction de contraste à norme constante . . . . .	41
2.5.4.1	L'algorithme CNA- $l$ . . . . .	42
2.5.4.2	L'algorithme CQA . . . . .	42
2.5.4.3	L'algorithme "Simplified CQA" ou "Simplified CMA" . . . .	43
2.6	Simulations . . . . .	44
2.7	Conclusion . . . . .	46

<b>3</b>	<b>Exploitation de la redondance introduite par les codes STBC pour la séparation</b>	<b>49</b>
3.1	Principe . . . . .	49
3.2	Une première approche : recherche de $\mathbf{P}$ avec $\Phi$ connue . . . . .	50
3.2.1	Méthode associée au code d'Alamouti . . . . .	50
3.2.2	Méthode associée au code de Tarokh $\mathcal{G}_3$ . . . . .	52
3.3	Une seconde approche : proposition de critères avec $\Phi$ et $\mathbf{P}$ inconnus . . . . .	53
3.3.1	Critère associé au code d'Alamouti . . . . .	53
3.3.2	Critère associé au code de Tarokh $\mathcal{G}_3$ . . . . .	54
3.3.3	Critère de séparation associé au critère $J_{Alamouti}$ et $J_{\mathcal{G}_3}$ . . . . .	56
3.3.4	Critère associé au code d'Or . . . . .	56
3.4	Conditions suffisantes et matrice Hessienne . . . . .	58
3.4.1	Conditions suffisantes du premier et du second ordre . . . . .	58
3.4.2	Matrice Hessienne . . . . .	58
3.4.3	Points stationnaires . . . . .	60
3.5	Recherche des minima du critère $J_{CMA} + J_{Alamouti}$ . . . . .	61
3.5.1	La fonction de coût . . . . .	61
3.5.2	Étude des points stationnaires . . . . .	62
3.6	Minima des critères $J_{CMA} + J_{\mathcal{G}_3}$ et $J_{Or}$ . . . . .	64
3.6.1	Minima du critère $J_{CMA} + J_{\mathcal{G}_3}$ . . . . .	64
3.6.2	Minima du critère $J_{Or}$ . . . . .	66
3.7	Implémentation des critères . . . . .	66
3.8	Simulations . . . . .	67
3.8.1	Code d'Alamouti . . . . .	68
3.8.2	Code de Tarokh $\mathcal{G}_3$ . . . . .	70
3.8.3	Code d'Or . . . . .	72
3.9	Conclusion . . . . .	76
<b>4</b>	<b>Deux algorithmes analytiques : l'AMMA et l'ASCMA</b>	<b>79</b>
4.1	Fonction de coût . . . . .	79
4.2	Recherche du sous-espace contenant la solution . . . . .	83
4.3	L'AMMA par blocs . . . . .	85
4.4	L'AMMA adaptatif . . . . .	85
4.4.1	Poursuite du sous-espace . . . . .	86
4.4.1.1	Principe . . . . .	86
4.4.1.2	Adaptation de NOOJA à notre problème . . . . .	87
4.4.2	Mise à jour de $\mathbf{t}_l$ . . . . .	88
4.4.3	Estimation des symboles . . . . .	89
4.5	Simulations . . . . .	90
4.6	Conclusion . . . . .	93
<b>5</b>	<b>Association filtre de Kalman et BSS</b>	<b>95</b>
5.1	Modèle du signal . . . . .	95
5.1.1	Modélisation de la transmission . . . . .	95
5.1.2	Modélisation des variations du canal . . . . .	96
5.2	Le filtre de Kalman . . . . .	97
5.3	Cas particulier : les codes OSTBC . . . . .	97



5.4	Initialisation du filtre de Kalman . . . . .	99
5.5	Simulations . . . . .	99
5.6	Comparaison entre le filtre de Kalman et l'AMMA adaptatif . . . . .	101
5.6.1	Canal de Rice . . . . .	101
5.6.2	Canal de Rayleigh . . . . .	101
5.7	Conclusion . . . . .	102
<b>6</b>	<b>Association filtre de Kalman et BSS : le cas convolutif</b>	<b>105</b>
6.1	Modèle théorique . . . . .	105
6.2	La séparation aveugle de sources en convolutif . . . . .	106
6.3	L'égaliseur DFE . . . . .	108
6.4	Association filtre de Kalman et DFE . . . . .	110
6.4.1	Principe du filtre de Kalman . . . . .	110
6.4.2	Prédiction . . . . .	110
6.5	Initialisation du filtre de Kalman . . . . .	111
6.6	Simulations . . . . .	112
6.7	Conclusion . . . . .	114
	<b>Conclusion</b>	<b>115</b>
	<b>Annexe</b>	<b>121</b>
<b>A</b>	<b>Expression théorique de l'EQM en exploitant la redondance introduite par le code d'Alamouti</b>	<b>123</b>
<b>B</b>	<b>Recherche des minima du critère <math>J_{CMA} + J_{\mathcal{G}_3}</math></b>	<b>125</b>
B.1	La fonction de coût . . . . .	125
B.2	Étude des points stationnaires . . . . .	126
<b>C</b>	<b>Recherche des minima du critère <math>J_{or}</math></b>	<b>131</b>
C.1	Changement de variable . . . . .	131
C.2	Étude des points stationnaires . . . . .	133
<b>D</b>	<b>Preuves des propriétés du chapitre 4</b>	<b>137</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>139</b>

# Acronymes et abréviations

ACMA	Analytical Constant Modulus Algorithm
AMMA	Analytical MultiModulus Algorithm
AR	Auto Régressif
ASCMA	Analytical Simplified Constant Algorithm
BER	Bit Error Rate
BSS	Blind Source Separation
CM	Constant Modulus
CN	Constant Norm
CQA	Constant sQuare Algorithm
D-BLAST	Diagonal Bell Labs Advanced Space Time
DFE	Decision Feedback Equalizer
FOBI	Fourth Order Blind Identification
H-BLAST	Horizontal Bell Labs Advanced Space Time
IES	Interférence Entre Symboles
i.i.d.	indépendants et identiquement distribués
JADE	Joint Approximate Diagonalization of Eigen-matrices
MMA	MultiModulus Algorithm
MMSE	Minimum Mean Square Error
MIMO	Multiple Input Multiple Output
ML	Maximum Likelihood
MUK	MultiUser Kurtosis
NOOJA	Normalized Orthogonal Oja
OFDM	Orthogonal Frequency Division Multiplexing
OS	Optimal Step-Size
OSIC	Ordered Successive Interference Cancellation
SIMO	Single Input Multiple Output
SINR	Signal Interference Noise Ratio
SISO	Single Input Single Output
TEB	Taux d'Erreur Binaire
V-BLAST	Vertical Bell Labs Advanced Space Time
ZF	Zero Forcing



# Notations

$N_t$	Nombre d'antennes émettrices
$N_r$	Nombre d'antennes réceptrices
$\mathbf{s}(k)$	Vecteur des $N_t$ signaux transmis non codés par un code MIMO
$\mathbf{x}(k)$	Vecteur des $N_t$ signaux transmis et résultants d'un codage MIMO des symboles $\mathbf{s}(k)$
$\mathbf{y}(k)$	Vecteur des $N_r$ signaux reçus
$\underline{\mathbf{y}}(k)$	Vecteur des $N_t$ signaux reçus blanchis
$\underline{\mathbf{b}}(k)$	Vecteur $N_r \times 1$ représentant le bruit blanc additif gaussien
$\mathbf{z}(k)$	Vecteur des $N_r$ signaux séparés
$\mathbf{H}$	Matrice $N_r \times N_t$ représentant le canal de transmission
$\mathcal{H}$	Matrice de Sylvester du canal convolutif
$L$	Retard du canal convolutif
$\mathbf{W}$	Matrice $N_t \times N_t$ de séparation orthonormalisée
$\tilde{\mathbf{W}}$	Matrice $N_t \times N_t$ de séparation non orthonormalisée
$\mathbf{B}$	Matrice $N_t \times N_r$ de blanchiment
$\mathbf{G}$	Matrice $N_t \times N_r$ globale de séparation
$\Phi$	Matrice $N_t \times N_t$ diagonale représentant l'indétermination sur la phase
$\mathbf{P}$	Matrice $N_t \times N_t$ représentant les permutations
$\mathbf{R}_{aa}$	Matrice de corrélation des signaux $\mathbf{a}(k)$
$\sigma_a^2$	Varianace des signaux $\mathbf{a}(k)$
$\mu$	Pas d'adaptation des algorithmes à gradient stochastique
$R$	Constante de dispersion
$N_s$	Nombre donné de symboles transmis
$\Re(z)$	Partie réelle du complexe $z$
$\Im(z)$	Partie imaginaire du complexe $z$
$\mathbf{a}_l$	$l^{\text{ième}}$ colonne de la matrice $\mathbf{A}$
$\text{vec}(\mathbf{A})$	Rangée les colonnes de la matrice $\mathbf{A}$ les unes après les autres dans un vecteur
$\text{diag}(\mathbf{a})$	Matrice diagonale construite à partir des coefficients du vecteur $\mathbf{a}$
$\otimes$	Produit de Kronecker
$\circ$	Produit de Katri-Rao : $\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = (\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{b}_1 \ \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{b}_2 \ \dots)$



# Table des figures

1.1	Schéma d'un système de transmission MIMO . . . . .	5
1.2	Exemple de canal radio-mobile soumis aux multi-trajets . . . . .	7
1.3	Réponse impulsionnelle et fréquentielle d'un canal plat en fréquence . . . . .	8
1.4	Réponse impulsionnelle et fréquentielle d'un canal sélectif en fréquence . . . . .	9
1.5	Gain d'un canal non sélectif en temps . . . . .	10
1.6	Gain d'un canal sélectif en temps . . . . .	11
1.7	Tableau récapitulatif des différentes sélectivités . . . . .	12
1.8	Évanouissements temporels d'un canal de Rayleigh . . . . .	13
1.9	Évanouissements temporels d'un canal de Rice avec un gain $K_{rice}$ de 10 dB . . . . .	14
1.10	Architecture d'un émetteur H-BLAST . . . . .	16
1.11	Schéma représentant le processus d'un émetteur H-BLAST . . . . .	16
1.12	Architecture d'un émetteur V-BLAST . . . . .	16
1.13	Schéma représentant le processus d'un émetteur V-BLAST . . . . .	16
1.14	Architecture d'un émetteur D-BLAST . . . . .	17
1.15	Schéma représentant le processus d'un émetteur D-BLAST . . . . .	17
1.16	Effets du gain de diversité et de codage sur la courbe de probabilité d'erreur . . . . .	19
1.17	TEB des égaliseurs ZF, MMSE, OSIC, ML obtenus avec $N_t = N_r = 2$ et une modulation 4-QAM . . . . .	24
1.18	Schéma d'un récepteur dans un contexte d'interception . . . . .	25
2.1	Synopsis de la BSS . . . . .	28
2.2	Algorithme de blanchiment adaptatif . . . . .	32
2.3	SINR, en fonction du temps, des différents algorithmes de BSS . . . . .	44
2.4	TEB en fonction du RSB des différents algorithmes de BSS . . . . .	45
2.5	Constellations obtenues en sortie des algorithmes CMA, MMA et SCMA à 30 dB avec $N_t = 2$ , $N_r = 4$ et une constellation 4-QAM et $\delta_f T_s = 10^{-4}$ . . . . .	46
3.1	TEB lorsqu'un code d'Alamouti est utilisé en émission . . . . .	67
3.2	SINR lorsqu'un code d'Alamouti est utilisé en émission . . . . .	68
3.3	EQM lorsqu'un code d'Alamouti est utilisé en émission . . . . .	69
3.4	Phases obtenues en sortie des BSS lorsqu'un code d'Alamouti est utilisé en émission et lorsqu'il n'y a pas de permutation . . . . .	70
3.5	TEB lorsqu'un code de Tarokh est utilisé en émission . . . . .	71
3.6	SINR lorsqu'un code de Tarokh est utilisé en émission . . . . .	72
3.7	EQM lorsqu'un code de Tarokh est utilisé à l'émission . . . . .	73

3.8	Phases obtenues en sortie des BSS lorsqu'un code de Tarokh est utilisé en émission . . . . .	73
3.9	SINR lorsqu'un code d'Or est utilisé en émission . . . . .	74
3.10	Phases obtenues en sortie des BSS lorsqu'un code d'Or est utilisé en émission	74
3.11	TEB lorsqu'un code d'Or est utilisé en émission . . . . .	75
4.1	Poursuite du sous-espace mineur de $\tilde{\mathbf{C}}$ et $\bar{\mathbf{C}}$ . . . . .	88
4.2	Adaptive Algebraic-MMA . . . . .	89
4.3	Constellations obtenues avec un décalage en fréquence . $SNR = 30dB$ , $N_t = 2$ , $N_r = 4$ , $\delta_f T_s = 10^{-3}$ et $f_d T_s = 0.0011$ . . . . .	90
4.4	TEB obtenu sans décalage en fréquence en fonction du SNR. $N_t = 2$ , $N_r = 4$ , $\delta_f T_s = 0$ et $f_d T_s = 0.0011$ . . . . .	91
4.5	SINR obtenu sans décalage en fréquence en fonction du temps. $SNR =$ $15dB$ , $N_t = 2$ , $N_r = 4$ , $\delta_f T_s = 0$ et $f_d T_s = 0.0033$ . . . . .	92
4.6	Gain des trajets $h_{11}$ et $h_{21}$ obtenus avec l'AMMA adaptatif . . . . .	92
5.1	Schéma représentant l'association BSS-Filtre de Kalman . . . . .	99
5.2	Estimation des trajets $h_{11}$ et $h_{21}$ avec l'algorithme ACMA . . . . .	100
5.3	Estimation des trajets $h_{11}$ et $h_{21}$ avec le filtre de Kalman utilisé dans un contexte aveugle . . . . .	101
5.4	TEB du filtre de Kalman et de l'AMMA adaptatif, avec un canal de Rice .	102
5.5	TEB du filtre de Kalman et de l'AMMA adaptatif, avec un canal de Rayleigh	103
6.1	TEB de l'ACMA par blocs obtenus pour des canaux avec et sans atténua- tion d'amplitude des trajets retardés. Canaux de Rayleigh . . . . .	111
6.2	Gain des trajets directs $h_{11}$ et $h_{21}$ avec le filtre de Kalman utilisé dans un contexte aveugle. Canaux de Rice . . . . .	112
6.3	TEB du filtre de Kalman utilisé en aveugle et en coopératif, avec un canal de Rice . . . . .	113

# Liste des tableaux

1.1	Algorithme de détection OSIC . . . . .	23
3.1	Tableau récapitulatif du critère associé au code d'Alamouti . . . . .	54
3.2	Tableau récapitulatif du critère associé au code de Tarokh . . . . .	55
3.3	Tableau récapitulatif du critère associé au code d'Or . . . . .	58
3.4	Tableau récapitulatif des fonctions de coût associées aux codes STBC et leur minima . . . . .	65
3.5	Résumé des ambiguïtés levées grâce aux fonctions de coût proposées . . . .	77
6.1	Tableau récapitulatif des apports de la thèse . . . . .	117





# Introduction

Pour répondre à la demande constante de l'augmentation des débits des transmissions numériques, le laboratoire Bell a proposé dans les années 90 un système utilisant plusieurs antennes à l'émission et à la réception pour transmettre les messages des utilisateurs. Ces systèmes nommés MIMO pour Multiple Input Multiple Output permettent d'augmenter théoriquement le débit proportionnellement au nombre d'antennes émettrices. Par la suite, ces systèmes ont été utilisés non plus pour augmenter le débit mais pour augmenter la fiabilité de la transmission en utilisant des codes introduisant de la redondance. Ces systèmes commencent à faire l'objet de normes IEEE et sont peu à peu utilisés dans les technologies actuelles.

Ce travail s'inscrit dans le cadre d'une thèse CIFRE, menée en collaboration entre la société IPSIS (Ingénierie Pour Signaux et Systèmes) et l'équipe SCEE (Signal, Communication et Électronique Embarquée) de Supélec membre du laboratoire IETR (Institut d'Électronique et des Télécommunications de Rennes). Le but est de concevoir un moyen d'écoute de signaux issus de systèmes MIMO pour la DGA (Délégation Générale de l'Armement). Ce projet a été divisé en deux parties, la première, réalisée par l'UBO (Université de Bretagne Occidentale), consiste en la détection et l'interception des signaux MIMO, ainsi que l'estimation des paramètres de la transmission, c'est à dire le nombre d'antennes émettrices, la modulation et le code MIMO. La seconde est l'objet de cette thèse et cherche à estimer les symboles transmis sur des canaux MIMO instantanés ou convolutifs et constants ou variables.

Dans ce travail, notre problématique est d'estimer les sources de manière aveugle en supposant connus les paramètres de transmission, mais sans connaissance du canal et sans symboles pilotes. La méthode la plus utilisée pour ce type de contexte est la séparation aveugle de sources. Cependant, ce type de méthode estime les sources à une permutation et à une rotation près. Nous avons cherché à lever ces ambiguïtés introduites par la BSS, autant que faire se peut, en utilisant la redondance des sources introduite par les codes MIMO. D'autre part, la séparation aveugle utilisant une implémentation à gradient stochastique est lente à converger, ce qui la rend difficilement utilisable sur des canaux qui varient rapidement dans le temps. Pour éviter cet inconvénient, nous avons utilisé deux types de méthodes, la première est une séparation aveugle de sources implémentée de manière algébrique, permettant ainsi une convergence rapide de l'algorithme. La seconde méthode est l'utilisation d'un filtre de Kalman initialisé de manière aveugle pour poursuivre les variations du canal. Cette dernière méthode peut être utilisée à la fois sur des canaux instantanés ou des canaux convolutifs variant dans le temps.

Le **chapitre 1** a pour but de présenter les systèmes MIMO ainsi que les techniques qui leurs sont associées. Après avoir présenté le modèle théorique et les différents canaux

de tels systèmes, nous aborderons les techniques de codage MIMO que nous avons utilisé. Nous poursuivrons sur les décodages que nous utiliserons avec le filtre de Kalman. Finalement, nous donnerons un bref aperçu des techniques utilisées pour estimer les paramètres d'émission.

Le **chapitre 2** présente le principe de la séparation aveugle de sources, ainsi que ses inconvénients. Puis nous détaillerons les pré et post-traitements qui lui sont associés. Un état de l'art sera ensuite effectué pour présenter les différents critères et les différentes implémentations de la séparation aveugle existantes.

Le **chapitre 3** propose des méthodes pour estimer les sources transmises tout en évitant les phases et la permutation introduites sur les sources par la séparation aveugle de sources. Les méthodes que nous utilisons pour lever ces ambiguïtés exploitent la redondance introduite par les codes MIMO. Ainsi, nous proposons trois critères, chacun associé à un code MIMO en l'occurrence le code d'Alamouti, de Tarokh ou le code d'Or. Les minima de chacun de ces critères sont déterminés à travers une étude théorique. Des simulations sur canaux instantanés et fixes viennent compléter l'étude théorique.

Le **chapitre 4** est exclusivement dédié aux méthodes algébriques. Ces méthodes permettent une convergence rapide contrairement aux algorithmes de séparation utilisant un gradient stochastique. Jusqu'à présent, seul le critère appelé CM (Constant Modulus) était implémenté de manière algébrique, conduisant ainsi à une convergence extrêmement rapide comparé aux méthodes à gradient stochastique. Dans ce chapitre, nous proposons une implémentation algébrique du critère nommé MM (MultiModulus). Nous appellerons cet algorithme AMMA pour Analytical MultiModulus Algorithm. Ce dernier permet de retrouver les sources à une phase de  $k\pi/2$  près au lieu d'une phase arbitraire pour le CM et permet d'atteindre de meilleures performances. Des simulations, obtenues sur des canaux instantanés et variables, illustreront ces dires.

Le **chapitre 5** propose d'utiliser une approche totalement différente pour estimer les sources sur des canaux variables : l'utilisation d'un filtre de Kalman initialisé par une séparation aveugle de sources. Ce chapitre se focalise sur les canaux instantanés et variables. Le filtre de Kalman permet de poursuivre les variations d'un canal qui fluctue très rapidement. Le filtre de Kalman utilise, pour estimer le canal, les symboles transmis à l'instant courant, ainsi, pour estimer ces derniers un égaliseur est utilisé. Le filtre de Kalman est habituellement utilisé dans des transmissions coopératives puisqu'il doit être initialisé par des symboles pilotes. Ne possédant pas de tels symboles dans un contexte aveugle, nous proposons d'utiliser la séparation aveugle de sources pour estimer les premiers symboles transmis et ainsi initialiser le filtre de Kalman. Des simulations compareront les performances obtenues avec ce filtre dans le cas aveugle et dans le cas coopératif. Des simulations complémentaires compareront le filtre de Kalman utilisé en aveugle avec l'algorithme AMMA proposé dans le chapitre 4.

Le **chapitre 6** aborde notre problématique dans un contexte de canaux convolutifs et variables temporellement. En effet, peu de travaux existent pour estimer les sources dans un tel contexte à l'aide de la séparation aveugle de sources. Les seules contributions exis-

tantes sont adaptées uniquement aux canaux convolutifs invariants dans le temps. Nous avons donc associé, comme dans le chapitre 5, le filtre de Kalman à la BSS afin de pouvoir estimer les sources de manière aveugle dans un environnement convolutif et variable.

Nous allons maintenant présenter au fil de ce document des méthodes pour estimer les symboles transmis de manière aveugle sur des canaux allant des plus simples, c'est à dire fixes et instantanés, aux plus complexes, i.e. variables et convolutifs.



# Chapitre 1

## Les systèmes MIMO

Historiquement, les transmissions MIMO ont été conçues en 1996 par le laboratoire Bell [Fos96] afin d'augmenter la capacité du canal. Ce type de transmission utilise plusieurs antennes en émission et plusieurs antennes en réception afin de transmettre un message. Par la suite des techniques de codage [Ala98, TJC99a, BRV05] ont été proposées afin d'utiliser les transmissions à antennes multiples, non plus pour augmenter la capacité du canal mais pour augmenter la fiabilité de la transmission. Au niveau du récepteur de nombreuses techniques de décodage ont été proposées, comme l'égaliseur du forçage à zéro ou le décodeur à maximum de vraisemblance,...

Ce chapitre vise donc à se familiariser avec les systèmes MIMO et les techniques de codage/décodage qui leurs sont associées. Un premier paragraphe est dédié aux transmissions MIMO, c'est à dire au modèle théorique, aux différents types de canaux de transmission et enfin à la notion de diversité utilisée dans les systèmes MIMO. Par la suite, nous présenterons les codes MIMO utilisés dans cette thèse. Finalement, différentes techniques de décodage seront détaillées.

### 1.1 Les transmissions MIMO

#### 1.1.1 Modèle théorique

Considérons un système MIMO avec  $N_t$  émetteurs et  $N_r$  récepteurs (figure 1.1). On suppose ici que le canal de transmission est non-sélectif en temps et en fréquence, ainsi le trajet entre la  $m^e$  antenne émettrice et la  $n^e$  antenne réceptrice est représenté par le coefficient

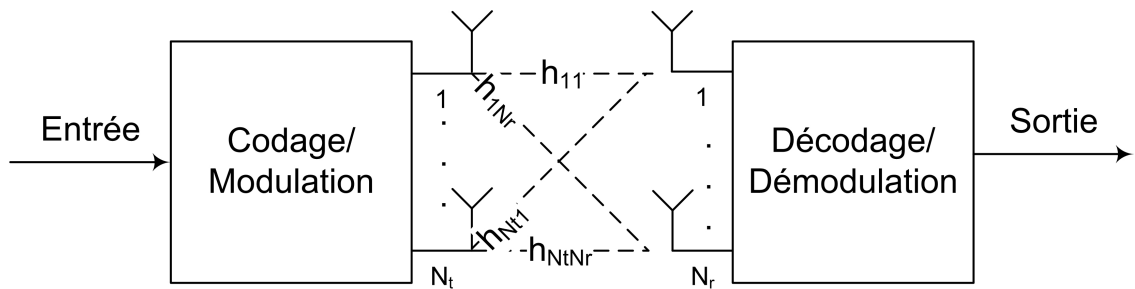


FIG. 1.1 – Schéma d'un système de transmission MIMO

d'atténuation complexe  $h_{nm}$ . On appelle  $s_m(k)$  le signal transmis sur la  $m^e$  antenne à l'instant  $k$ , le symbole reçu sur la  $n^e$  antenne s'écrit alors :

$$y_n(k) = \sum_{m=1}^{N_t} h_{nm} s_m(k) + b_n(k)$$

où  $b_n$  représente un bruit additif.

En considérant l'ensemble des signaux reçus simultanément, cette relation peut s'écrire sous forme matricielle de dimension  $N_t \times N_r$  :

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{H}\mathbf{s}(k) + \mathbf{b}(k)$$

avec

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_{11} & \dots & h_{1N_t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N_r1} & \dots & h_{N_r N_t} \end{pmatrix}, \mathbf{y} = (y_1 \dots y_{N_r})^T$$

$$\mathbf{s} = (s_1 \dots s_{N_t})^T, \mathbf{b} = (b_1 \dots b_{N_r})^T$$

Par la suite on supposera que :

- les symboles transmis sont i.i.d<sup>(1)</sup>, de puissance unitaire,
- le bruit additif est blanc, gaussien, de moyenne nulle et de variance  $\sigma_b^2$ ,
- le bruit et les symboles sont décorrélés,

c'est à dire :

$$E[\mathbf{s}\mathbf{s}^H] = \mathbf{I}_{N_t}, E[\mathbf{s}\mathbf{b}^H] = \mathbf{0}$$

### 1.1.2 Canaux de transmission

Les signaux transmis en communication numérique sont généralement perturbés par un bruit additif  $b(k)$  et un canal de transmission  $h(k)$ . Ce paragraphe vise à présenter les différents types d'atténuation que peuvent subir les signaux sources. Ainsi, nous allons présenter maintenant le bruit additif et les différents évanouissements provoqués par le canal de transmission.

#### 1.1.2.1 Le bruit additif blanc gaussien complexe $b(k)$

Le bruit additif  $b(k)$  considéré en transmission modélise toutes les imperfections d'origine interne (bruit thermiques, etc...) et d'origine externe (bruit d'antenne, etc...). Ce type de bruit est caractérisé par un processus aléatoire blanc gaussien complexe de moyenne nulle et de variance  $\sigma_b^2$  :  $b \rightsquigarrow \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, \sigma_b^2)$ . La densité de probabilité de ce processus est alors la suivante :

$$p(b) = \frac{1}{\pi\sigma_b^2} e^{-\frac{|b|^2}{\sigma_b^2}}$$

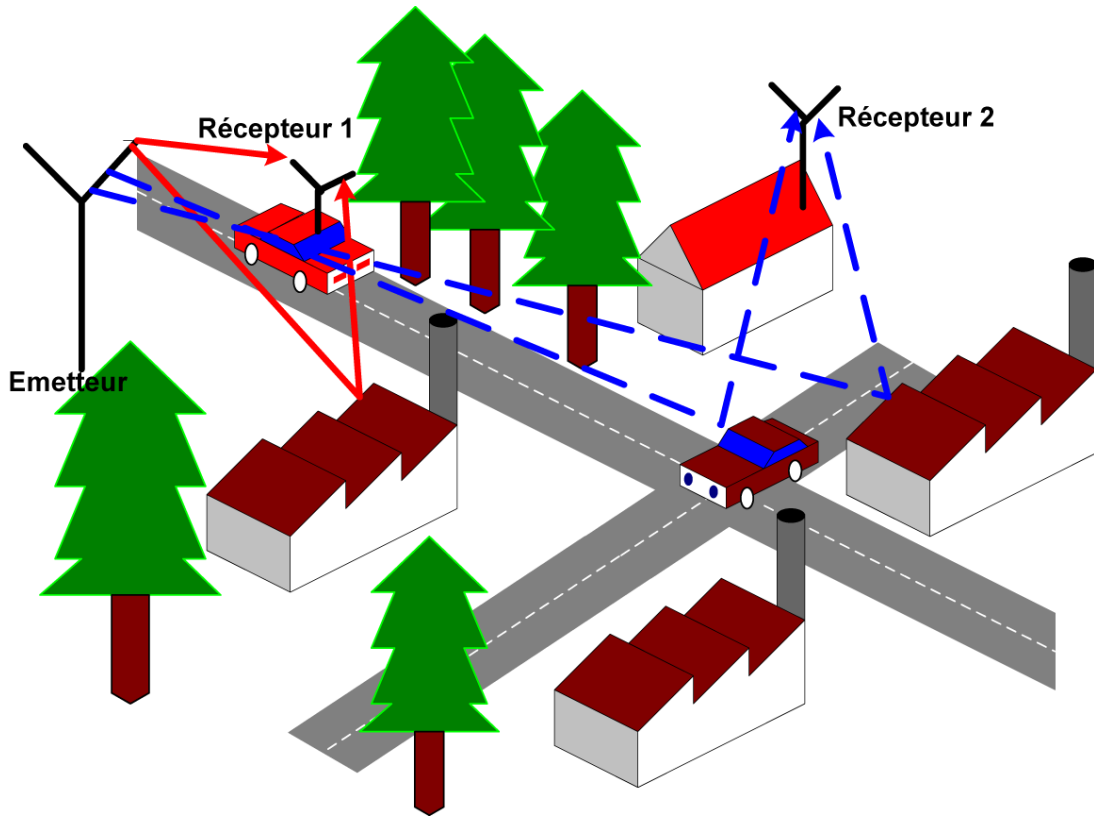


FIG. 1.2 – Exemple de canal radio-mobile soumis aux multi-trajets

### 1.1.2.2 Les évanouissements sélectifs en fréquence

Ces évanouissements, encore appelés atténuations, se caractérisent essentiellement par le phénomène de trajets multiples lié aux interactions électromagnétiques telles que la diffraction, la réflexion et la réfraction (Figure 1.2) causées par les bâtiments, arbres, voitures, montagnes, etc..., pour les environnements extérieurs et les meubles, murs, etc... pour les environnements intérieurs.

Les composantes du signal arrivent donc au récepteur avec des retards différents, des puissances atténuées et avec un certain décalage de phase.

Le canal à évanouissements fréquentiels peut être caractérisé par l'étalement temporel  $T_m$  et la bande de cohérence  $B_c$ . L'étalement temporel  $T_m$  est défini par la différence entre le plus grand et le plus court des retards. Quant à la bande de cohérence  $B_c$  du canal, elle correspond à la gamme de fréquence sur laquelle on peut considérer la fonction de transfert du canal comme constante (figure 1.3 et 1.4). On a :  $B_c \approx \frac{1}{T_m}$ .

Le canal sera d'autant plus sélectif que  $T_m$  sera grand. Nous pouvons distinguer dans ce paragraphe deux types de canaux :

<sup>(1)</sup>indépendants et identiquement distribués



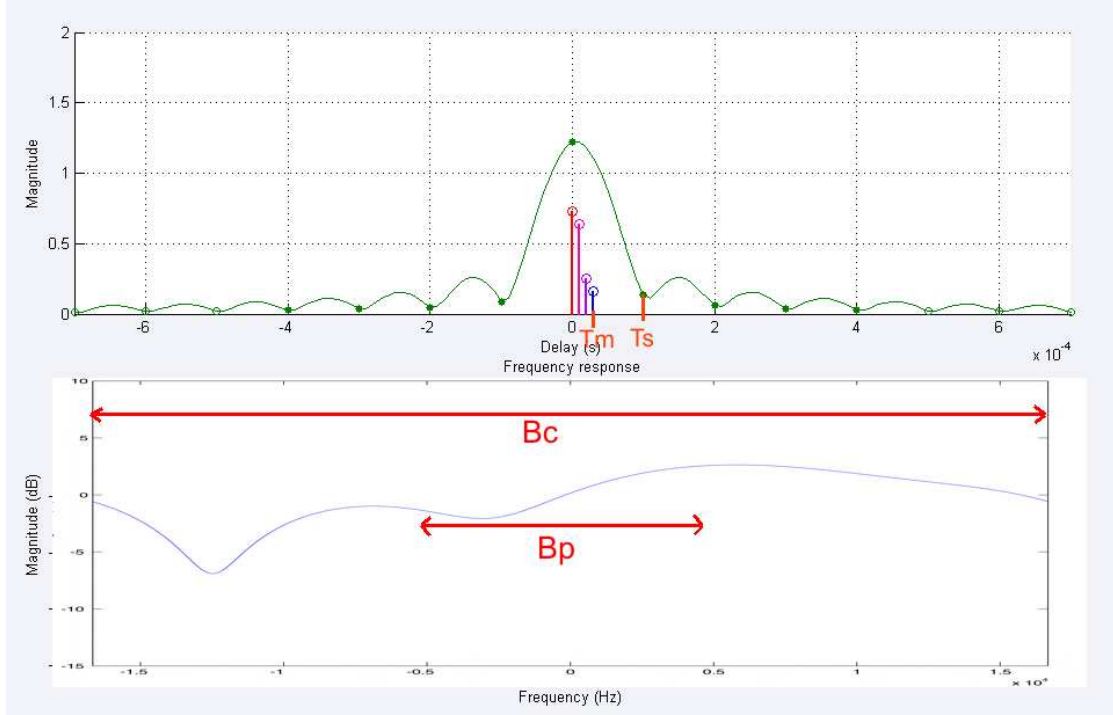


FIG. 1.3 – Réponse impulsionnelle et fréquentielle d'un canal plat en fréquence

- Le canal non-sélectif en fréquence ou instantané, représenté sur la figure 1.3. Dans ce cas, le temps symbole  $T_s$  est largement supérieur à l'étalement temporel ( $T_s \gg T_m$ ), la fonction de transfert fréquentielle du canal est alors supposée constante par rapport à la bande passante du signal notée  $B_p$  ( $B_p < B_c$ ). Le canal introduit peu d'IES<sup>(2)</sup>.
- Le canal sélectif en fréquence ou convolutif est représenté sur la figure 1.4. Le temps symbole est dans ce cas largement inférieur à l'étalement temporel ( $T_m \gg T_s$ ). La fonction de transfert du canal n'est alors plus constante sur la bande passante du signal ( $B_c < B_p$ ). Le canal introduit dans ce cas de l'IES.

La réponse impulsionnelle d'un canal composé de  $N$  trajets s'exprime de la manière suivante :

$$h(\tau) = \sum_{n=1}^N a_n \delta(\tau - \tau_n)$$

où  $\tau_n$  représente le retard de propagation et  $a_n$  l'atténuation pour chaque trajet.

Considérons l'exemple d'un canal à deux trajets, le signal reçu à l'instant  $t$  est alors :

$$y(t) = a_1 s(t - \tau_1) + a_2 s(t - \tau_2)$$

En prenant la transformée de Fourier des deux membres, nous obtenons :

$$\begin{aligned} Y(f) &= a_1 S(f) e^{-j2\pi\tau_1 f} + a_2 S(f) e^{-j2\pi\tau_2 f} \\ &= H(f) S(f) \end{aligned}$$

<sup>(2)</sup>Interférence Entre Symboles

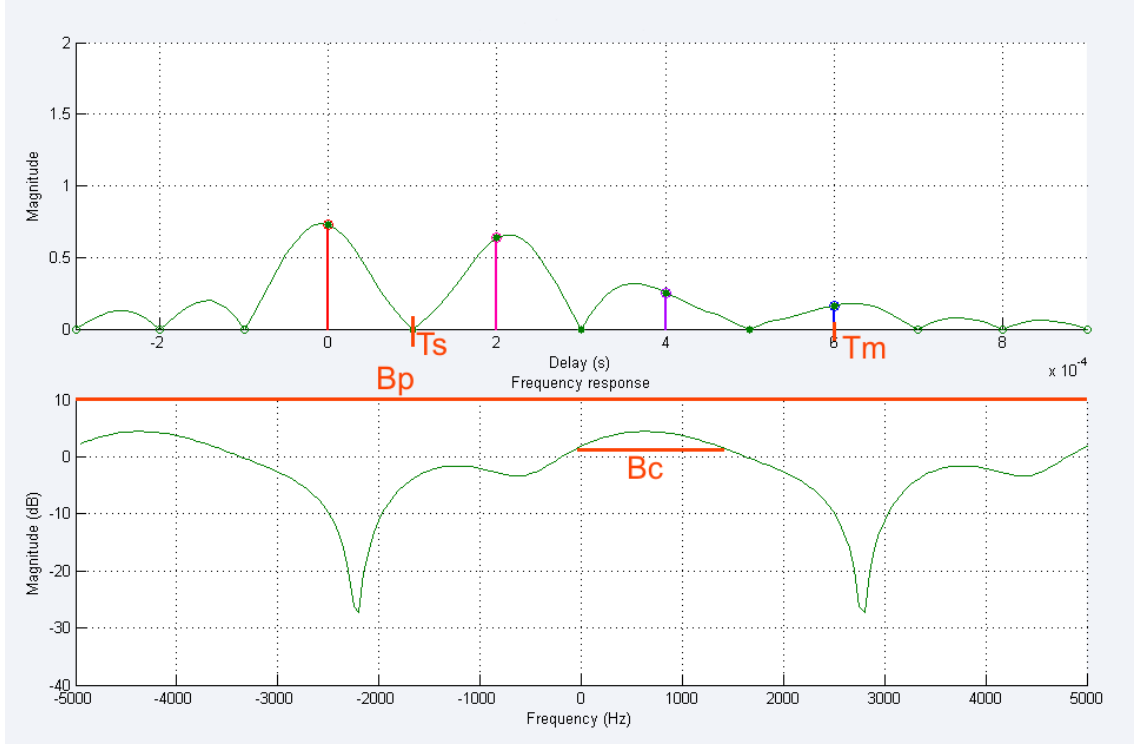


FIG. 1.4 – Réponse impulsionnelle et fréquentielle d'un canal sélectif en fréquence

avec  $H(f) = a_1 e^{-j2\pi\tau_1 f} (1 + \frac{a_2}{a_1} e^{-j2\pi(\tau_2 - \tau_1)f})$ . La réponse fréquentielle  $H(f)$  du canal peut présenter un creux à la fréquence  $\frac{1}{2(\tau_2 - \tau_1)}$ . C'est ce creux qui est appelé évanouissement sélectif en fréquence ou fading et il est d'autant plus important que  $a_2/a_1$  est proche de 1. Nous verrons dans le paragraphe 1.1.3.3, que la diversité fréquentielle permet de lutter contre ce type d'évanouissement.

Le nombre de trajets pour un même signal étant énorme, seul les trajets significatifs, dont le retard et l'atténuation restent en deçà d'un seuil acceptable, sont retenus.

### 1.1.2.3 Les évanouissements sélectifs en temps

La variation du canal de propagation est liée aux mouvements des différents éléments du milieu de propagation : mouvement de l'émetteur et/ou du récepteur, des piétons, des véhicules, etc... (récepteur 1 sur la figure 1.2) Les variations du canal sont proportionnelles à la vitesse de déplacement de l'objet avec lequel l'onde interagit ainsi qu'à la fréquence porteuse. Ce phénomène s'appelle l'effet Doppler.

L'effet Doppler peut être caractérisé par un étalement fréquentiel  $B_m$ , correspondant à la différence entre le plus grand et le plus petit décalage en fréquence dû aux trajets multiples et  $T_c$  représente le temps de cohérence du canal, durant lequel les distorsions temporelles du canal restent négligeables. Généralement  $T_c \approx \frac{1}{B_m}$ . Le temps de cohérence

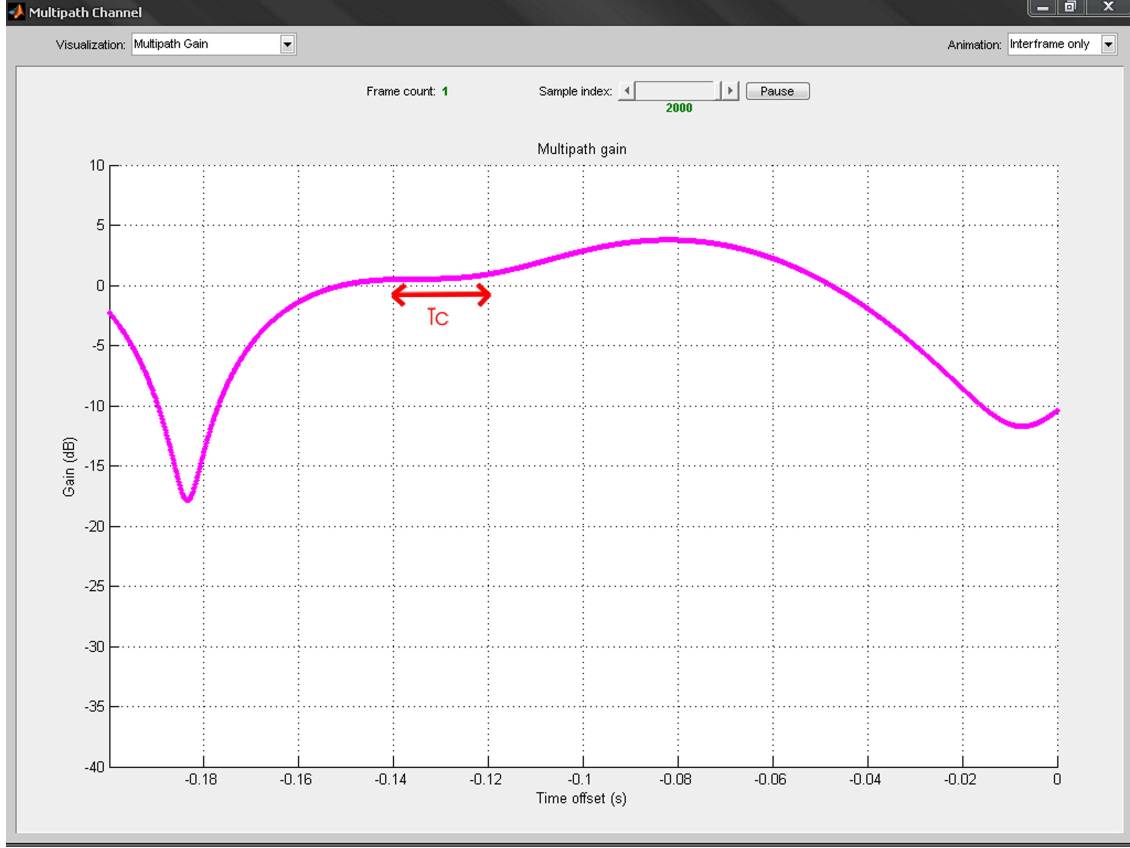


FIG. 1.5 – Gain d'un canal non sélectif en temps

est inversement proportionnel à la fréquence Doppler maximale  $f_D$  :

$$T_c \approx \frac{9}{16\pi f_D} \text{ avec } f_D = \frac{f_0 v}{c}$$

où  $f_0$  représente la fréquence porteuse,  $v$  la vitesse relative exprimée en  $m/s$  et  $c = 3.10^8 m/s$  désigne la célérité de la lumière.

Lorsque le temps symbole  $T_s$  est largement inférieur au temps de cohérence ( $T_s \ll T_c$ ), le canal peut être considéré comme constant pendant la transmission (figure 1.5). Le canal est dit non sélectif en temps. Par contre, lorsque  $T_s \gg T_c$ , le canal ne peut plus être supposé constant sur une période symbole et le canal est dit sélectif en temps (figure 1.6).

La réponse impulsionnelle d'un canal composé de  $N$  décalages fréquentiels s'exprime ainsi :

$$h(t) = \sum_{n=1}^N a_n e^{-j2\pi f_n t} \delta(t)$$

avec  $f_n$  la fréquence Doppler du  $n^e$  retards. Prenons l'exemple de deux retards fréquentiels, le signal reçu est la somme de deux signaux comportant un décalage en fréquence :

$$Y(f) = a_1 X(f - f_1) + a_2 X(f - f_2)$$

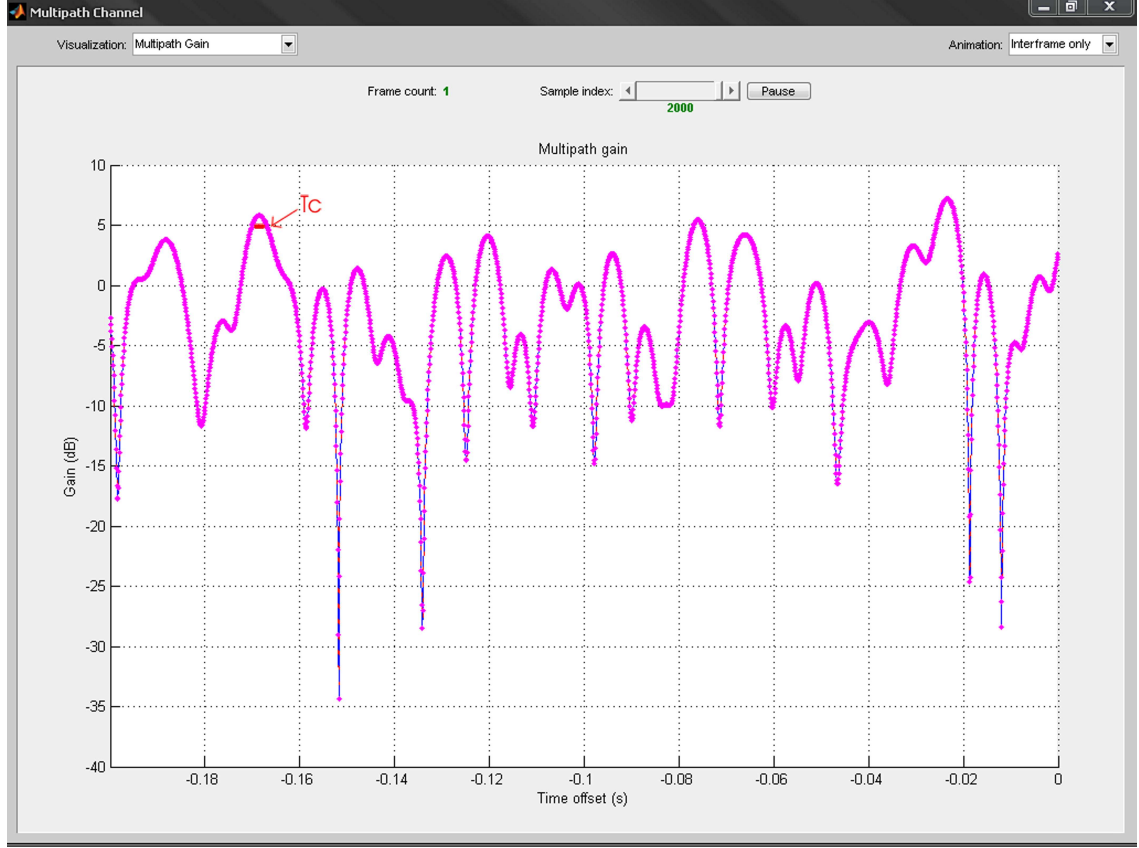


FIG. 1.6 – Gain d'un canal sélectif en temps

Et par transformée de Fourier inverse, on obtient :

$$\begin{aligned}
 y(t) &= a_1 s(t) e^{j2\pi f_1 t} + a_2 s(t) e^{j2\pi f_2 t} \\
 &= a_1 s(t) e^{j2\pi f_1 t} \left( 1 + \frac{a_2}{a_1} e^{j2\pi (f_2 - f_1) t} \right)
 \end{aligned}$$

Aux instants multiples de  $\frac{1}{2(f_2 - f_1)}$  le signal peut être fortement atténué.

Pour lutter contre les évanouissements sélectifs en temps, une solution est de transmettre le message en l'envoyant simultanément plusieurs fois au cours du temps. Cette technique présentée dans le paragraphe 1.1.3.2 est appelée diversité temporelle.

La figure 1.7 résume les différents types de sélectivité du canal que nous venons de présenter.

#### 1.1.2.4 Modélisation des atténuations

Si l'on considère un canal MIMO plat en fréquence (i.e. non-convolutif) et sélectif en temps, l'expression des signaux reçus sur la  $n^{\text{ième}}$  antenne à l'instant  $k$  est la suivante :

$$y_n(k) = \sum_{m=1}^{N_t} h_{nm}(k) s_m(k) + b_n(k)$$

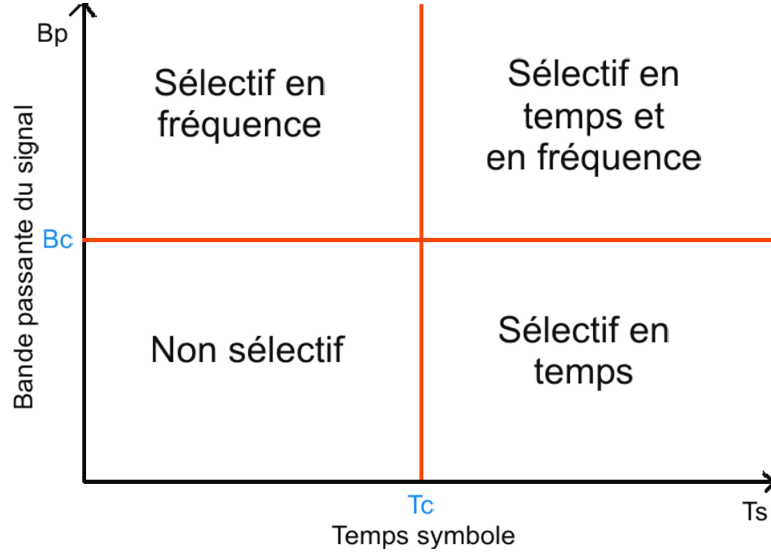


FIG. 1.7 – Tableau récapitulatif des différentes sélectivités

On suppose généralement que les  $h_{nm}(k)$  suivent une loi gaussienne complexe circulaire. Si la moyenne est nulle, on parle de canaux de Gauss lorsque les coefficients sont fixes et de canaux de Rayleigh sinon. Lorsque la moyenne de  $h_{nm}(k)$  est non nulle, les canaux sont appelés canaux de Rice.

– **Canaux de Rayleigh**

Si l'on considère qu'il n'y a pas de trajet direct entre l'émetteur et le récepteur et que le canal varie dans le temps (Récepteur 2 sur la figure 1.2) alors le module de  $h_{nm}(k)$  suit une loi de Rayleigh dont la densité de probabilité est la suivante :

$$p(|h_{nm}|) = \frac{|h_{nm}|}{\sigma_{|h_{nm}|}^2} e^{-\frac{|h_{nm}|^2}{2\sigma_{|h_{nm}|}^2}}, \quad |h_{nm}| \geq 0$$

Les parties réelles et imaginaires de  $h_{nm}(k)$  sont gaussiennes et décorrélées de variance  $\sigma_{h_{nm}}^2/2$  et la phase de  $h_{nm}(k)$  suit une loi uniforme sur  $[0, 2\pi[$ .

– **Canaux de Gauss**

Lorsque le canal ne varie pas dans le temps et qu'il n'y a pas de trajet direct entre l'émetteur et le récepteur, les parties réelles et imaginaires de  $h_{nm}$  consistent en un tirage d'un échantillon de loi gaussienne.

– **Canaux de Rice**

Si l'environnement permet un trajet direct entre l'émetteur et le récepteur (Récepteur 1 sur la figure 1.2), le canal comprend alors une composante déterministe  $\tilde{h}_{mn}$  et une aléatoire  $\bar{h}_{mn}$  :

$$h_{mn} = \tilde{h}_{mn} + \bar{h}_{mn}$$

Le coefficient de Rice  $K_{rice}$  est donné par le rapport entre la puissance de la composante déterministe et celle de la composante aléatoire :

$$K_{rice} = \frac{\tilde{h}_{mn}^2}{2\sigma}$$

avec  $\sigma$  l'écart type de la composante aléatoire  $\bar{h}_{mn}$ . Le module de  $h_{mn}$  suivra alors une loi de Rice :

$$p(|h_{nm}|) = \frac{|h_{nm}|}{\sigma^2} e^{-\frac{|h_{nm}|^2 + a^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{|h_{nm}|a}{\sigma^2}\right)$$

où  $a$  est l'amplitude de la composante déterministe et  $I_0$  est la fonction de Bessel modifiée de première espèce et d'ordre 0. On remarque que si  $a$  est nul, on obtient la distribution de Rayleigh et si  $a$  est important, on retrouve un canal BBAG.

#### – Comparaison des canaux de Rice et de Rayleigh

La figure 1.8 représente un évanouissement de Rayleigh et la figure 1.9, un évanouissement de Rice d'un gain  $K_{rice}$  de 10 dB. Nous pouvons noter que les évanouissements d'un canal de Rice sont beaucoup moins importants que ceux d'un canal de Rayleigh.

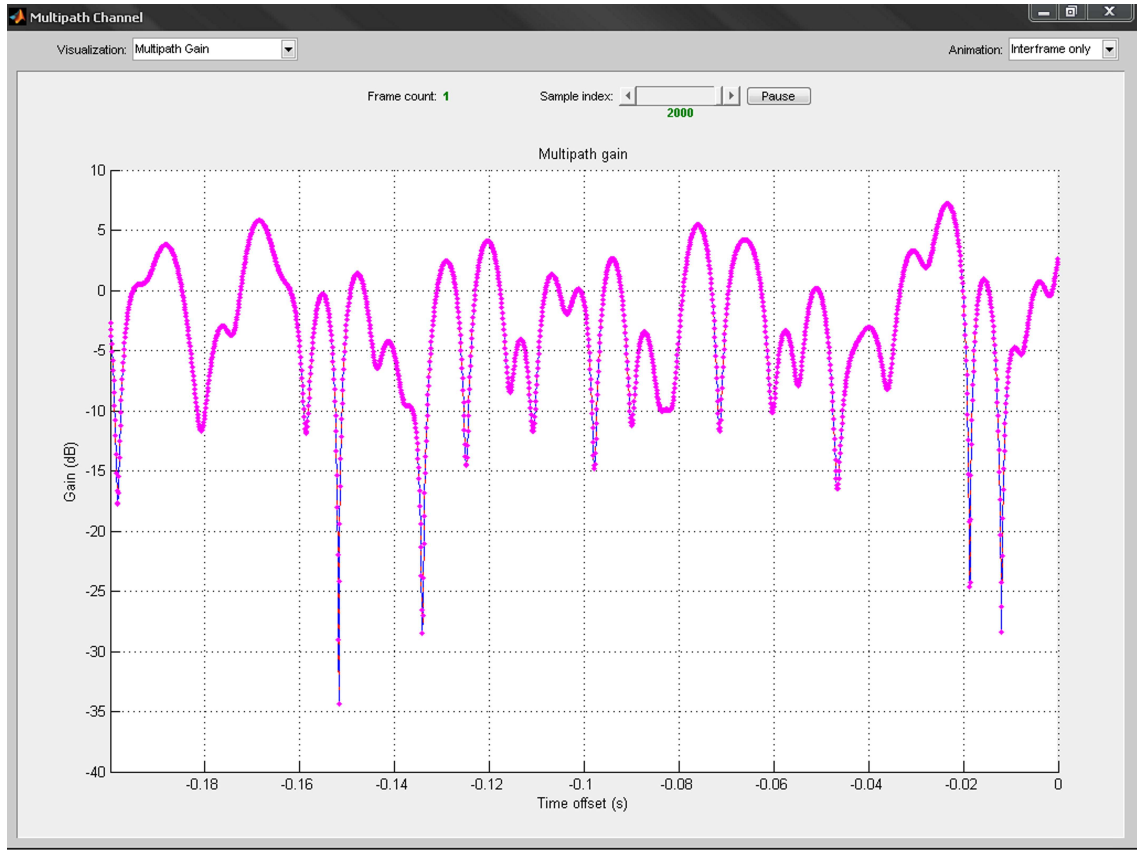


FIG. 1.8 – Évanouissements temporels d'un canal de Rayleigh

### 1.1.3 Notion de diversité

Afin de combattre les évanouissements provoqués par les multi-trajets du canal, les systèmes de transmission utilisent la diversité. Cette diversité est mise en oeuvre par l'envoi et/ou la réception de plusieurs répliques d'un même signal. Ainsi, il y a de fortes chances

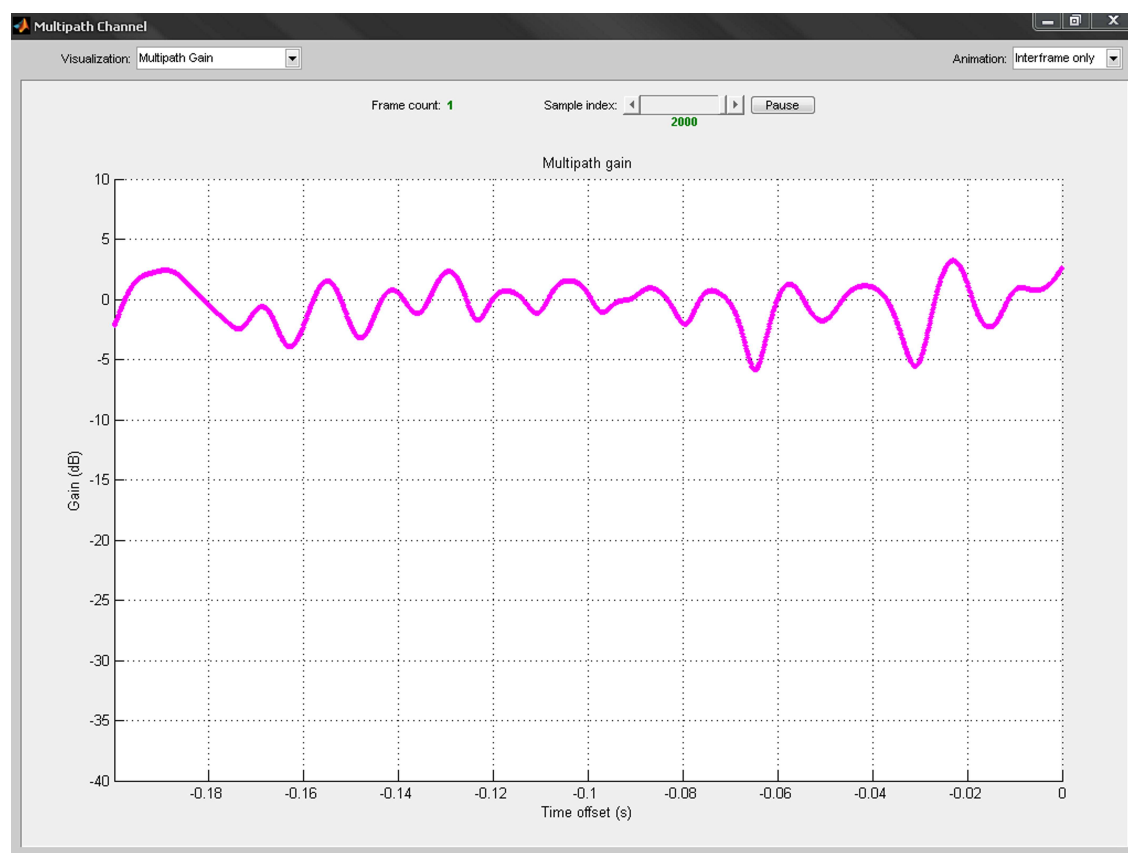


FIG. 1.9 – Évanouissements temporels d'un canal de Rice avec un gain  $K_{rice}$  de 10 dB

qu'une de ces répliques ne soit pas trop endommagée par l'atténuation du canal. Il existe différents types de diversité que l'on peut combiner et que nous décrivons ci-dessous.

### 1.1.3.1 La diversité spatiale

La diversité spatiale consiste à utiliser plusieurs antennes émettrices et/ou réceptrices afin de transmettre un message. Les antennes doivent alors être séparées dans l'espace d'au moins la distance de cohérence afin que les différents évanouissements soient indépendants. Cette dernière est de l'ordre de  $0,4\lambda$  à  $0,6\lambda$  pour le récepteur et jusqu'à  $10\lambda$  pour une station de base. La diversité en émission conduit aux systèmes MISO<sup>(3)</sup>, celle en réception aux systèmes SIMO<sup>(4)</sup>, lorsque les deux sont combinées on a alors affaire à un système MIMO.

### 1.1.3.2 La diversité temporelle

La diversité temporelle est utilisée pour combattre les évanouissements sélectifs en temps décrits dans le paragraphe 1.1.2.3. Ce type de diversité émet le signal de manière redondante à des instants différents, séparés d'au moins le temps de cohérence du canal afin

<sup>(3)</sup>Multiple Input Single Output

<sup>(4)</sup>Single Input Multiple Output

d'assurer une décorrélation des signaux. Nous rencontrerons par la suite ce type de diversité à travers les codes MIMO espace-temps décrits dans le paragraphe 1.2 qui transmettent de manière redondante les signaux.

### 1.1.3.3 La diversité fréquentielle

La diversité fréquentielle est utile lorsque les canaux sont sélectifs en fréquence (paragraphe 1.1.2.2). Ce type de diversité utilise différentes fréquences porteuses pour transmettre un même signal. Ces différentes fréquences porteuses doivent être séparées d'au moins la bande de cohérence du canal.

## 1.2 Les techniques MIMO

Cette partie recense les différents types de techniques MIMO d'émission utilisées dans cette thèse. Ces techniques MIMO se découpent en deux groupes principaux, d'une part les techniques à multiplexage spatial qui permettent d'augmenter la capacité du système par rapport à un système SISO et d'autre part les codes espace-temps qui augmentent la diversité du système afin d'accroître la fiabilité de la transmission. Nous présenterons les codes à multiplexage spatial V, D et H-BLAST créés par Foschini en 1996 [Fos96, WFGV98], ainsi que les codes d'Alamouti [Ala98], de Tarokh [TJC99a] et le code d'or [BRV05] qui font partie des codes espace-temps.

Ces techniques de codage MIMO, mis à part les codes de Tarokh, sont utilisées dans les standards Wi-fi (IEEE 802.11n)[80207], Wi-Max SC (IEEE 802.16)[80204], Wi-Max OFDMA (IEEE 802.16) et UMTS release 6 et 7 (3GPP)[3GP07].

### 1.2.1 Les techniques à multiplexage spatial

Le principe du multiplexage spatial est l'agencement sans redondance de la séquence d'information suivant l'axe spatial. Le système transmet alors  $N_t$  fois plus de symboles utiles par unité de temps qu'un système SISO. Un tel système a été proposé par Foschini [Fos96] en 1996, l'architecture de ce premier système MIMO, est appelé D-BLAST<sup>(5)</sup>. Par la suite Foschini et Wolniansky proposent deux schémas de codage plus réalistes [WFGV98], appelé V-BLAST<sup>(6)</sup> et H-BLAST<sup>(7)</sup>. Pour pouvoir être décodés, ces codes BLAST doivent utiliser au moins autant d'antennes en réception qu'en émission.

#### 1.2.1.1 Architecture H-BLAST

Cette architecture horizontale découpe directement la chaîne d'information en  $N_t$  sous-chaînes puis chacune est codée indépendamment. Après avoir été modulée, chaque sous-chaîne est transmise simultanément par son antenne (Figure 1.10). Le schéma 1.11 fait ressortir cette architecture horizontale. Soit  $(b_1, \dots, b_k)$  les bits d'information à transmettre et  $(c_1^l, \dots, c_k^l)$  la  $l^e$  chaîne de symboles codés par le  $l^e$  codeur est transmise sur la  $l^e$  antenne.

<sup>(5)</sup>Diagonal-Bell Labs Advanced Space Time

<sup>(6)</sup>Vertical-Bell Labs Advanced Space Time

<sup>(7)</sup>Horizontal-Bell Labs Advanced Space Time



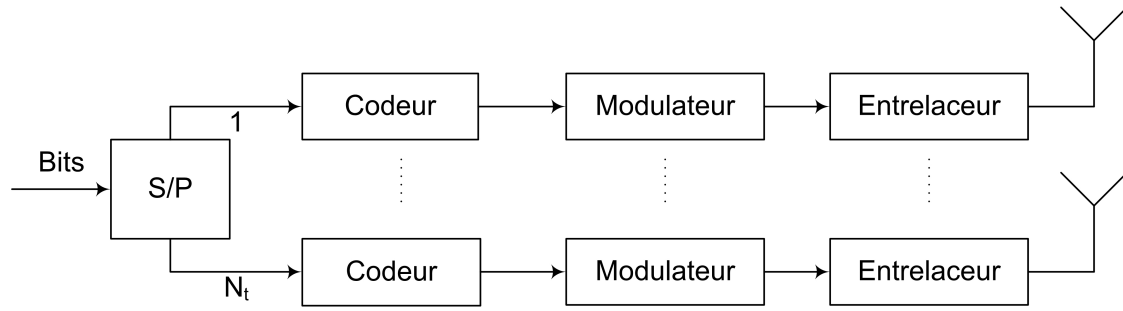


FIG. 1.10 – Architecture d'un émetteur H-BLAST

$$\begin{array}{c}
 (b_1, \dots, b_k) \xrightarrow{\text{Démultiplexeur}} \begin{pmatrix} b_1 & b_{N_t+1} & \dots \\ \vdots & & \\ b_{N_t} & b_{2N_t} & \dots \end{pmatrix} \xrightarrow[N_t^e \text{ codeur}]{1^e \text{ codeur}} \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & \dots \\ \vdots & & \\ c_1^{N_t} & c_2^{N_t} & \dots \end{pmatrix}
 \end{array}$$

FIG. 1.11 – Schéma représentant le processus d'un émetteur H-BLAST

### 1.2.1.2 Architecture V-BLAST

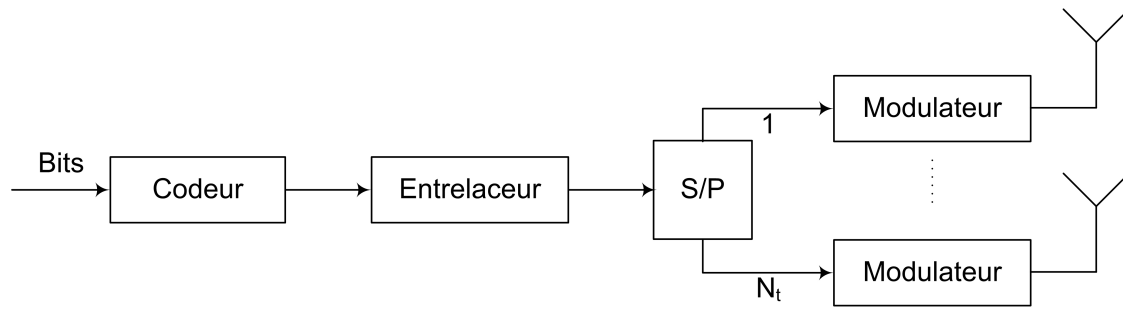


FIG. 1.12 – Architecture d'un émetteur V-BLAST

$$\begin{array}{c}
 (b_1, \dots, b_k) \xrightarrow{\text{Démultiplexeur}} \begin{pmatrix} b_1 & b_{N_t+1} & \dots \\ \vdots & & \\ b_{N_t} & b_{2N_t} & \dots \end{pmatrix} \xrightarrow[N_t^e \text{ modulateur}]{1^e \text{ modulateur}} \begin{pmatrix} s_1^1 & s_2^1 & \dots \\ \vdots & & \\ s_1^{N_t} & s_2^{N_t} & \dots \end{pmatrix}
 \end{array}$$

FIG. 1.13 – Schéma représentant le processus d'un émetteur V-BLAST

L'architecture V-BLAST est la plus simple et la seule qui n'utilise pas de technique de codage. En effet, cette architecture verticale (Figure 1.12) est simplement composée d'un démultiplexeur, permettant de diviser la chaîne binaire en  $N_t$  sous-chaînes munies chacune d'un modulateur. Les sous-chaînes de symboles résultantes sont ensuite transmises sur l'antenne qui leur est associée. Soit  $(s_1^l, \dots, s_k^l)$  la  $l^e$  chaîne de symboles, le schéma 1.13 représente le processus que subit la chaîne binaire.

### 1.2.1.3 Architecture D-BLAST

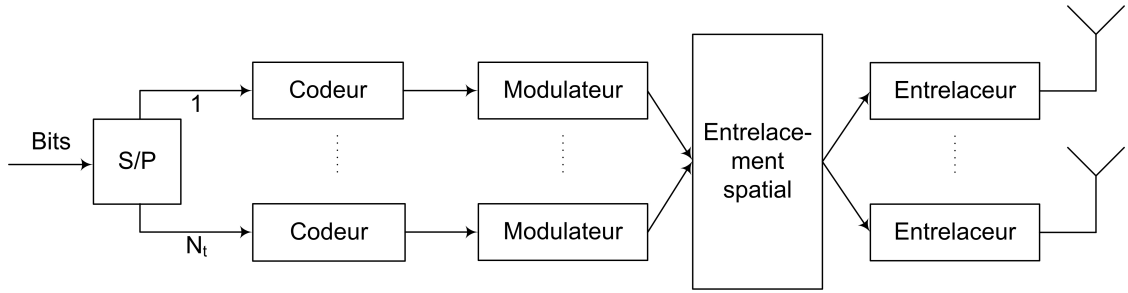


FIG. 1.14 – Architecture d'un émetteur D-BLAST

Comparé aux autres structures, le D-BLAST possède une structure plus complexe (Figure 1.14). Comme pour le H-BLAST, chaque sous-chaîne est codée indépendamment, mais au lieu de transmettre les symboles d'une sous-chaîne sur une même antenne, ils sont transmis successivement par chacune des  $N_t$  antennes. Dans cette architecture les symboles codés d'une sous-chaîne occupent une diagonale de la matrice de transmission. Cette structure permet de mieux résister aux atténuations du canal, cependant la complexité de son décodage la rend peu attrayante. Le schéma 1.15 fait ressortir la complexité de cette architecture verticale et son manque d'efficacité due à une partie nulle de la matrice ralentissant ainsi la transmission :

$$\begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1^{N_t} & c_2^{N_t} & \dots \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Entrelacement spatial}} \begin{pmatrix} c_1^1 & c_1^2 & \dots & c_1^{N_t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2^1 & c_2^2 & \dots & c_2^{N_t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & c_1^{N_t} & c_2^{N_t} & \dots & c_1^{N_t} \end{pmatrix}$$

FIG. 1.15 – Schéma représentant le processus d'un émetteur D-BLAST

### 1.2.2 Critère de construction des codes espace-temps

Différents types de critères sont utilisés pour évaluer et construire les codes espace-temps. Nous allons introduire ces critères dans ce paragraphe. Nous reprenons ici le modèle du système MIMO présenté dans le paragraphe 1.1.1 et utilisant  $N_t$  antennes émettrices et  $N_r$  antennes réceptrices. Nous considérons  $K$  symboles  $s$  à transmettre :  $\mathbf{s} = (s_1 \dots s_K)$ . Ces

symboles sont encodés par un code MIMO qui associe à  $\mathbf{s}$  la matrice code  $\mathbf{C}$  de dimension  $N_t \times T$  :

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1T} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N_t 1} & \dots & c_{N_t T} \end{pmatrix}$$

Le **rendement du code** MIMO est égal à  $R = K/T$ . Lorsque ces symboles codés sont transmis sur un canal non sélectif, nous obtenons les signaux reçus  $\mathbf{Y}$  :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{C} + \mathbf{B}$$

avec  $\mathbf{B}$  le bruit additif de dimension  $N_r \times T$ .

La probabilité, pour une réalisation de canal  $\mathbf{H}$  fixée, que le récepteur décode le bloc  $\mathbf{C}'$  alors que le bloc  $\mathbf{C}$  a été transmis est appelée probabilité d'erreurs par paire et est notée  $P[\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}' | \mathbf{H}]$ .

On appelle  $\mathbf{D}$  la matrice représentant la différence entre les blocs  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{C}'$  :  $\mathbf{D} = \mathbf{C} - \mathbf{C}'$ . Soit  $\mathbf{A}$  la matrice Hermitienne telle que  $\mathbf{A} = \mathbf{D}\mathbf{D}^H = \mathbf{V}^H \mathbf{\Gamma} \mathbf{V}$ . Où  $\mathbf{V}$  est une matrice unitaire et  $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{N_t})$  une matrice diagonale. La probabilité  $P[\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}' | \mathbf{H}]$  est alors bornée de la manière suivante :

$$P[\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}' | \mathbf{H}] \leq e^{-\frac{E_s}{4N_0} d^2(c, c')}$$

où  $\frac{E_s}{N_0}$  représente le rapport signal à bruit par antenne et

$$d^2(c, c') = \sum_{n=1}^{N_r} \mathbf{h}_n \mathbf{D} \mathbf{D}^H \mathbf{h}_n^H \quad (1.1)$$

$$= \sum_{n=1}^{N_r} \sum_{m=1}^{N_t} \lambda_n |\beta_{mn}|^2 \quad (1.2)$$

Avec  $\mathbf{h}_m$  la  $m^e$  colonne de la matrice  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{v}_n$  la  $n^e$  colonne de la matrice  $\mathbf{V}$ ,  $\beta_{mn} = \mathbf{h}_m \mathbf{v}_n$ . La borne supérieure de la probabilité par paire  $P[\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}']$  est obtenue par l'espérance de la probabilité  $P[\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}' | \mathbf{H}]$  :

$$[\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}'] \leq \left( \frac{E_s}{N_0} \right)^{-r_d N_r} \left( \prod_{k=1}^{r_d} \lambda_k \right)^{-N_r}$$

où  $r_d$  est le rang de la matrice  $\mathbf{A}$  et  $\lambda_k$  sont les coefficients non nuls de la matrice  $\mathbf{\Gamma}$ .

Les codes espace-temps sont construits de manière à minimiser la probabilité d'erreur par paire  $P[\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}']$  pour toutes les paires possibles [RO05, TJC99b]. Deux critères sont alors définis :

- **Le critère du rang** : la matrice  $\mathbf{A}$  doit avoir un rang  $r_d$  le plus élevé possible afin de maximiser le **gain de diversité** égal à  $r_d N_r$ . Lorsque  $\mathbf{A}$  est de rang plein, la diversité est maximale et vaut  $N_t N_r$ .

- **Le critère du déterminant** : le terme  $\prod_{k=1}^{r_d} \lambda_k$  est appelé **gain de codage**. Celui-ci doit être maximisé pour l'ensemble de toutes les paires de matrices codes.

Nous avons donc vu que les performances d'un code espace-temps sont mesurées à l'aide de trois critères :

- **Le gain de diversité** noté  $G_d$
- **Le rendement du code** noté  $R$
- **Le gain de codage** noté  $G_c$

La probabilité d'erreurs moyenne d'une transmission de données dépend du gain de codage, du gain de diversité et du rapport signal à bruit de la manière suivante :

$$P_e \propto G_c (SNR)^{-G_d}$$

Ainsi, le gain de diversité  $G_d$  joue sur la pente et le gain de codage  $G_c$  sur la position horizontale de la courbe de probabilité d'erreur (figure (1.16)).

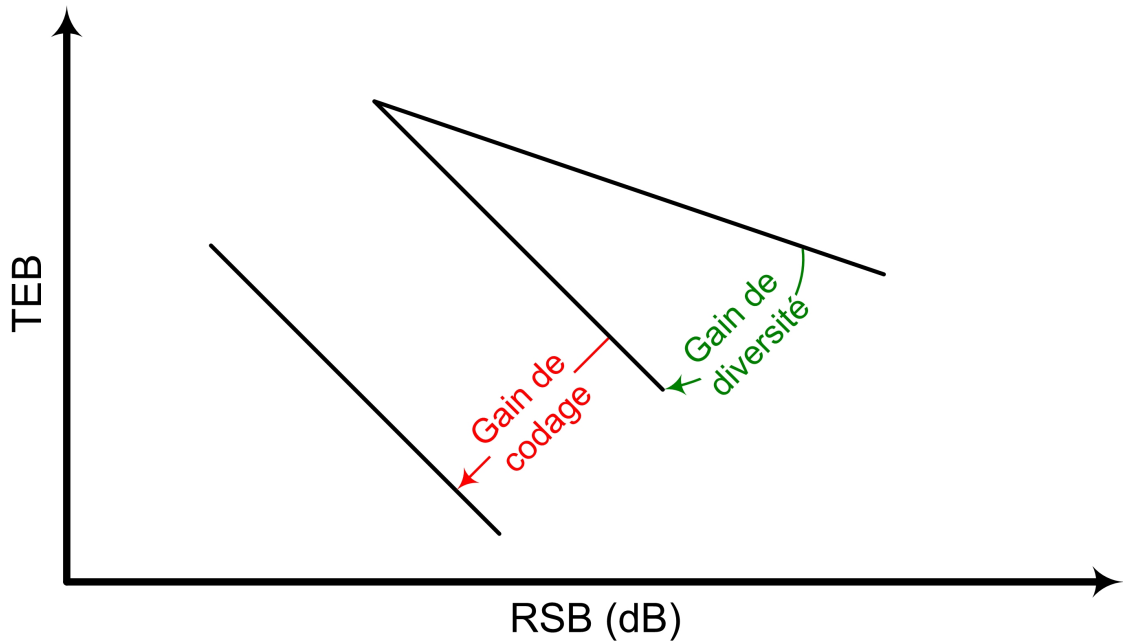


FIG. 1.16 – Effets du gain de diversité et de codage sur la courbe de probabilité d'erreur

### 1.2.3 Les codes espace-temps orthogonaux

La complexité des décodeurs des codes BLAST a conduit à la création de nouveaux schémas de codage. La propriété d'orthogonalité d'un code rend le décodage de celui-ci linéaire et donc peu complexe. Cependant, ces codes ont un rendement qui s'écroule lorsque le nombre d'antennes utilisées en émission augmente.

Le premier code orthogonal à deux antennes émettrices et à rendement unitaire a été proposé par Alamouti dans [Ala98] en 1998. Puis, Tarokh a proposé une généralisation de ce code pour trois et quatre antennes émettrices. Deux structures ont été proposées en 1999 par Tarokh, la première à rendement 1/2 et la seconde à rendement 3/4 [TJC99a, TJC99b].

### 1.2.3.1 Code d'Alamouti

Le code orthogonal  $\mathcal{H}_2$  construit par Alamouti atteint une diversité maximale. Ce code est optimal, c'est à dire qu'il vérifie les propriétés suivantes : rendement unitaire, diversité  $2N_r$  et orthogonalité pour deux antennes à l'émission et un nombre  $N_r$  arbitraire d'antennes réceptrices. Le mot de code est le suivant :

$$\mathcal{H}_2 = \begin{pmatrix} s(0) & -s^*(1) \\ s(1) & s^*(0) \end{pmatrix}$$

avec  $s(0)$  et  $s(1)$  deux symboles d'information.

Le signal reçu lorsqu'une antenne est utilisée à la réception s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} y(2k) & y(2k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s(2k) & -s^*(2k+1) \\ s(2k+1) & s^*(2k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b(2k) & b(2k+1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y(2k) = h_1 s(2k) + h_2 s(2k+1) + b(2k) \\ y(2k+1) = -h_1 s^*(2k+1) + h_2 s^*(2k) + b(2k+1) \end{cases}$$

Pour décoder le code d'Alamouti, le vecteur  $\mathbf{z}$  et la pseudo matrice de canal  $\mathbf{T}$  sont utilisés :

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} y(2k) \\ y^*(2k+1) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ h_2^* & -h_1^* \end{pmatrix}$$

Le vecteur  $\mathbf{z}$  et la matrice  $\mathbf{T}$  sont alors liés par la relation suivante :

$$\mathbf{z} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} s(2k) \\ s(2k+1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b(2k) \\ b(2k+1) \end{pmatrix}$$

Puisque la matrice  $\mathbf{T}$  est unitaire à un facteur près, les symboles transmis sont obtenus simplement en appliquant la matrice  $\mathbf{T}^H$  au vecteur  $\mathbf{z}$  :

$$\mathbf{T}^H \mathbf{z} = (|h_1|^2 + |h_2|^2) \begin{pmatrix} s(2k) \\ s(2k+1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b'(2k) \\ b'(2k+1) \end{pmatrix}$$

Ainsi, un simple détecteur à seuil permet de retrouver les symboles transmis. Le code d'Alamouti a ensuite été généralisé par Tarokh pour trois et quatre antennes en émission.

### 1.2.3.2 Code de Tarokh

Tarokh a démontré dans [TJC99a] que l'on peut avoir un rendement supérieur ou égal à  $1/2$  pour un nombre quelconque d'antennes à l'émission, et un rendement de  $3/4$  pour trois au quatre antennes en émission. Les codes de rendement  $1/2$  se nomment  $\mathcal{G}_3$  et  $\mathcal{G}_4$ , ceux de rendement  $3/4$  se nomment  $\mathcal{H}_3$  et  $\mathcal{H}_4$  pour respectivement 3 et 4 antennes. Les matrices mots de code associées sont les suivantes :

$$\mathcal{G}_3 = \begin{pmatrix} s(0) & -s(1) & -s(2) & -s(3) & s^*(0) & -s^*(1) & -s^*(2) & -s^*(3) \\ s(1) & s(0) & s(3) & -s(2) & s^*(1) & s^*(0) & s^*(3) & -s^*(2) \\ s(2) & -s(3) & s(0) & s(1) & s^*(2) & -s^*(3) & s^*(0) & s^*(1) \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{G}_4 = \begin{pmatrix} s(0) & -s(1) & -s(2) & -s(3) & s^*(0) & -s^*(1) & -s^*(2) & -s^*(3) \\ s(1) & s(0) & s(3) & -s(2) & s^*(1) & s^*(0) & s^*(3) & -s^*(2) \\ s(2) & -s(3) & s(0) & s(1) & s^*(2) & -s^*(3) & s^*(0) & s^*(1) \\ s(3) & s(2) & -s(1) & s(0) & s^*(3) & s^*(2) & -s^*(1) & s^*(0) \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{H}_3 = \begin{pmatrix} s(0) & -s^*(1) & \frac{s^*(2)}{\sqrt{2}} & \frac{s^*(2)}{\sqrt{2}} \\ s(1) & s^*(0) & \frac{s^*(2)}{\sqrt{2}} & -\frac{s^*(2)}{\sqrt{2}} \\ \frac{s(2)}{\sqrt{2}} & \frac{s(2)}{\sqrt{2}} & \frac{-s(0)-s^*(0)+s(1)-s^*(1)}{2} & \frac{s(1)+s^*(1)+s(0)-s^*(0)}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{H}_4 = \begin{pmatrix} s(0) & -s^*(1) & \frac{s^*(2)}{\sqrt{2}} & \frac{s^*(2)}{\sqrt{2}} \\ s(1) & s^*(0) & \frac{s^*(2)}{\sqrt{2}} & -\frac{s^*(2)}{\sqrt{2}} \\ \frac{s(2)}{\sqrt{2}} & \frac{s(2)}{\sqrt{2}} & \frac{-s(0)-s^*(0)+s(1)-s^*(1)}{2} & \frac{-s(1)-s^*(1)+s(0)-s^*(0)}{2} \\ \frac{s(2)}{\sqrt{2}} & -\frac{s(2)}{\sqrt{2}} & \frac{s(1)+s^*(1)+s(0)-s^*(0)}{2} & \frac{-(s(0)+s^*(0)+s(1)-s^*(1))}{2} \end{pmatrix}$$

Les codes de Tarokh se décodent de la même manière que le code d'Alamouti, c'est à dire qu'à chaque code est associé une matrice de canal équivalente  $\mathbf{T}$ .

#### 1.2.4 Le code d'Or

Le code d'Or fait partie des codes espace-temps, il a été construit par Belfiore et Rekaya dans [BRV05]. Ce mot de code fait partie des codes parfaits, c'est à dire qu'il vérifie les trois contraintes suivantes :

1. Il a un rendement plein  $N_t^2$ , i.e. le nombre de symboles d'information transmis est égal à  $N_t T$ , où la longueur temporelle  $T$  du code est égale au nombre d'antennes émettrices.
2. Il maximise le gain de codage.
3. Il possède une bonne efficacité spectrale, pour cela l'énergie moyenne doit être uniformément distribuée dans la matrice mot de code.

Le code d'or vérifie donc ces trois propriétés et possède les meilleures performances pour toutes les constellations de type QAM. Comme son nom l'indique il est construit à partir du nombre d'or  $\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  pour deux antennes émettrices et réceptrices. Son mot de code est le suivant :

$$\mathcal{O}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \alpha(s(0) + \theta s(1)) & \alpha(s(2) + \theta s(3)) \\ \gamma \bar{\alpha}(s(2) + \bar{\theta} s(3)) & \bar{\alpha}(s(0) + \bar{\theta} s(1)) \end{pmatrix}$$

où  $\bar{\theta} = 1 - \theta$ ,  $\alpha = 1 + j(1 - \theta)$ ,  $\bar{\alpha} = 1 + j(1 - \bar{\theta})$  et le facteur  $\frac{1}{\sqrt{5}}$  est nécessaire pour obtenir une matrice unitaire.

La valeur optimale de  $\gamma$  est choisie afin de maximiser le gain de codage, ainsi  $\gamma = j$ .

### 1.3 Algorithmes de décodage associés aux techniques MIMO

Les paragraphes suivants présentent les différentes techniques de décodage en réception. Le canal  $\mathbf{H}$  est supposé avoir été estimé au préalable à l'aide de techniques d'estimation de

canal. Dans un premier temps les techniques les moins complexes, c'est à dire les récepteurs linéaires tels que l'égaliseur à forçage à zéro (ZF) et à minimisation de l'erreur quadratique moyenne (MMSE), seront décrites. Puis une technique non linéaire appelée élimination successive d'interférences (OSIC) sera détaillée. Enfin nous aborderons le détecteur optimal basé sur le critère de maximum de vraisemblance (ML) ainsi que le décodeur par sphère (SD).

### 1.3.1 L'égaliseur de forçage à zéro (ZF)

L'égaliseur de forçage à zéro est une technique de détection par inversion de matrice. Cette technique consiste à appliquer au vecteur reçu une matrice d'égalisation  $\mathbf{W}$ . Le critère ZF<sup>(8)</sup> a été proposé afin de garantir une élimination de l'IES<sup>(9)</sup> en sortie de l'égaliseur. La matrice  $\mathbf{W}$  est alors égale à la pseudo inverse de la matrice de canal :

$$\mathbf{W} = (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H$$

En présence d'évanouissements et de bruit, le critère ZF a pour effet d'augmenter le niveau de bruit ce qui dégrade les performances.

### 1.3.2 L'égaliseur minimisant l'erreur quadratique moyenne (MMSE)

L'égaliseur MMSE<sup>(10)</sup> est basé sur la minimisation de l'erreur quadratique moyenne, donnée par :

$$\hat{\mathbf{W}} = \arg \min_{\mathbf{W}} E \left[ \|\mathbf{W}^H \mathbf{y} - \mathbf{s}\|^2 \right]$$

La matrice d'égalisation optimale est alors :

$$\mathbf{W} = \mathbf{H}^H \left( \frac{\sigma_b^2}{\sigma_s^2} \mathbf{I}_{N_r} + \mathbf{H} \mathbf{H}^H \right)^{-1}$$

avec  $E[\mathbf{b}\mathbf{b}^H] = \sigma_b^2 \mathbf{I}_{N_r}$  et  $E[\mathbf{s}\mathbf{s}^H] = \sigma_s^2 \mathbf{I}_{N_t}$ .

En présence de bruit, la matrice à inverser est toujours définie positive et donc inversible. Ce récepteur est donc moins sensible au bruit que l'égaliseur ZF mais ces deux égaliseurs deviennent équivalents en l'absence de bruit.

### 1.3.3 L'égaliseur à annulations successives d'interférences ordonnées

Les égaliseurs ZF et MMSE n'étant pas toujours satisfaisants : le premier est sensible au bruit et le second n'élimine pas toute l'ISI. Ainsi, Golden et Foschini ont proposé dans [GFVW99, FGVW99] un algorithme basé sur un critère ZF ou MMSE à retour de décision afin de décoder les codes BLAST.

Le principe de cet algorithme appelé OSIC<sup>(11)</sup> est le suivant : la contribution du symbole  $s$  qui vient d'être détecté est soustraite du vecteur reçu, ce qui donne un vecteur contenant

---

<sup>(8)</sup>Zero Forcing

<sup>(9)</sup>Interférence Entre Symboles

<sup>(10)</sup>Minimum Mean Square Error

<sup>(11)</sup>Ordered Successive Interference Cancellation

moins d'interférences. L'ordre dans lequel sont détectés les symboles joue un rôle important sur les performances du système.

Le symbole transmis sur la voie de données ayant la plus forte puissance est décodé en premier. Une fois décodé, sa contribution est annulée sur le vecteur reçu, l'opération est ensuite répétée jusqu'à l'obtention de tous les symboles transmis.

Les notations utilisées dans l'algorithme sont les suivantes :

- $(\mathbf{G}_i)_j$  est la  $j^{\text{ème}}$  ligne de  $\mathbf{G}_i$ .
- les  $k_i$  représentent l'ordre de détection des symboles.
- $\mathcal{Q}$  symbolise le processus de quantification.
- $\mathbf{H}_{k_i}^-$  est la matrice de canal  $\mathbf{H}$  annulée des contributions des  $k_i$  premiers émetteurs, c'est à dire que les colonnes  $k_1, \dots, k_i$  de  $\mathbf{H}$  ont été remplacées par des zéros.

L'algorithme OSIC est décrit dans le tableau 1.1.

Initialisation
$i = 1$ $G_1 = \mathbf{H}^\dagger$ $k_1 = \arg \min_j \ (\mathbf{G}_1)_j\ ^2$
Boucle itérative
$\mathbf{W}_{k_i} = (\mathbf{G}_i)_{k_i}$ $r_{k_i} = \mathbf{w}_{k_i}^T \mathbf{r}_i$ $\hat{s}_{k_i} = \mathcal{Q}(y_{k_i})$ $\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i - \hat{s}_{k_i} (\mathbf{H})_{k_i}$ $\mathbf{G}_{i+1} = (\mathbf{H}_{k_i}^-)^\dagger$ $k_{i+1} = \arg \min_{j \notin \{k_1, \dots, k_i\}} \ (\mathbf{G}_{i+1})_j\ ^2$ $i = i + 1$

TAB. 1.1 – Algorithme de détection OSIC

Comme tous les égaliseurs à retour de décision, l'OSIC a l'inconvénient de propager les erreurs. Ainsi de nombreux algorithmes d'amélioration ont été proposés [DAMB01, ZB02].

### 1.3.4 L'égaliseur à Maximum de Vraisemblance

L'égaliseur ML<sup>(12)</sup> est optimal en terme de BER<sup>(13)</sup>. Cette méthode consiste à comparer tous les signaux pouvant être reçus aux signaux réellement reçus, afin de sélectionner le plus vraisemblable d'entre eux :

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \min_{\mathbf{s}} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{s}\|^2$$

La complexité de cet algorithme croît exponentiellement avec le nombre d'antennes utilisées en émission et le nombre d'états  $M$  de la modulation. En effet, le récepteur doit comparer  $M^{N_t}$  solutions possibles avec le vecteur de signaux reçus.

<sup>(12)</sup> Maximum Likelihood

<sup>(13)</sup> Bit Error Rate



### 1.3.5 Le décodage par sphère

Le décodeur par sphère est un algorithme qui permet d'approcher les performances du décodeur ML tout en réduisant la complexité [DAMB00, DCB00]. Le principe de cet algorithme est de se placer au niveau du signal reçu  $\mathbf{y}$  et de chercher le point le plus proche parmi un réseau de points à l'intérieur d'une sphère de rayon  $\sqrt{R}$ . Cela permet de restreindre le domaine de recherche par maximum de vraisemblance et donc la complexité. En effet, seuls les points du réseau situés à moins de la distance  $\sqrt{R}$  du signal reçu sont considérés. Le choix de la valeur de  $R$  est donc crucial.

### 1.3.6 Performances

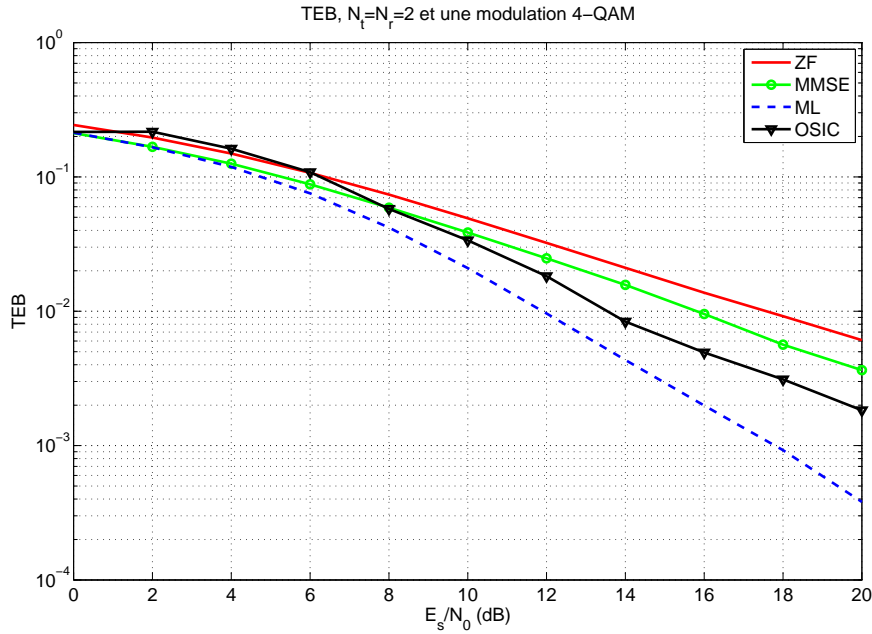


FIG. 1.17 – TEB des égaliseurs ZF, MMSE, OSIC, ML obtenus avec  $N_t = N_r = 2$  et une modulation 4-QAM

Les différents égaliseurs sont comparés en termes de taux d'erreur binaire (TEB) en fonction du rapport signal à bruit, ce dernier est représenté sur la figure 1.17. Le canal de propagation est non sélectif en temps et en fréquence, son module suit une loi de Rayleigh et est supposé parfaitement connu du récepteur. Quatre antennes sont utilisées en émission et en réception et les symboles sont issus d'une constellation 4-QAM.

La figure 1.17 représente le TEB obtenu avec  $10^6$  symboles, nous pouvons voir que conformément à ce qui est décrit dans les paragraphes précédents, lorsque le bruit est élevé l'égaliseur OSIC atteint des performances médiocres par contre lorsque le bruit est plus faible il obtient un TEB plus faible que les égaliseurs ZF et MMSE. On peut noter que l'égaliseur ML possède les meilleures performances et qu'à l'inverse, l'égaliseur ZF possède

les plus mauvaises performances.

## 1.4 Contexte de la thèse : l'interception

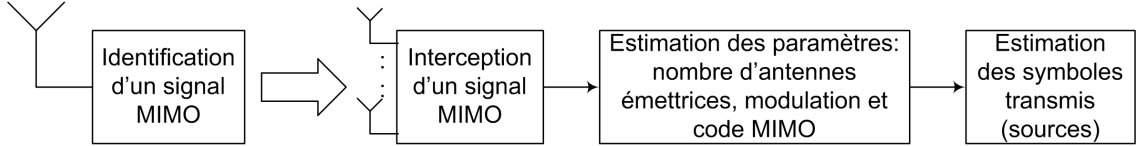


FIG. 1.18 – Schéma d'un récepteur dans un contexte d'interception

Le contexte de cette thèse est l'interception. Aussi, pour pouvoir récupérer les informations transmises plusieurs étapes doivent être suivies. La figure 1.18 représente le schéma d'un récepteur dans un contexte aveugle. Ainsi, nous supposons qu'un signal MIMO a été pré-identifié à l'aide d'une antenne réceptrice. Cette étape ne sera pas traitée dans ce document. Le signal est ensuite intercepté et plusieurs paramètres de transmission doivent être déterminés afin de pouvoir estimer les sources transmises. Les paramètres nécessaires sont le nombre d'antennes émettrices, la modulation et le code MIMO utilisé en émission. D'autre part, tous les signaux reçus sont enregistrés dans ce projet. Ainsi, nous ne nous soucions pas du mode de transmission utilisé, i.e. en paquets ou en flots de données. En effet, si les algorithmes de séparation n'ont pas le temps de converger en mode paquets, nous pouvons les réappliquer plusieurs fois, jusqu'à l'obtention d'une convergence satisfaisante.

### 1.4.1 Estimation du nombre d'antennes émettrices

La plupart des travaux existants utilisent les statistiques d'ordre 2 pour estimer le nombre d'antennes utilisées à l'émission. Ces méthodes utilisent la matrice de corrélation des signaux reçus  $\mathbf{R}_y = E[\mathbf{y}(k)\mathbf{y}^H(k)]$ . En supposant que la matrice  $\mathbf{H}$  est de rang plein, la valeur propre minimale de  $\mathbf{R}_y$  est égale à  $\sigma_b^2$  et est de multiplicité  $m = N_r - N_t$ . Connaissant  $N_r$ , on accède alors directement à  $N_t$ .

Plusieurs méthodes existent pour estimer cet ordre de multiplicité, parmi elles on peut citer [And63, Law56, Jam69] qui utilisent une fonction de vraisemblance, ou encore [WK85] utilisant des critères d'information ou bien [LNCX04, GLC96] qui modélisent la décroissance des valeurs propres du bruit. D'autres travaux [CYCB08a] utilisent les statistiques d'ordre supérieur pour estimer  $N_t$ , ces méthodes sont plus robustes face aux bruits corrélés comparés aux statistiques d'ordre 2.

### 1.4.2 Reconnaissance du code MIMO

Peu de travaux sont proposés dans la littérature pour reconnaître les codes MIMO utilisés en émission. La première méthode proposée [SW07] en 2007 permet uniquement d'identifier la taille du code spatio-temporel, mais ne permet pas de déterminer précisément le type de code MIMO. Cette méthode est basée sur l'exploitation de la cyclostationarité du code. Par la suite, Choqueuse a proposé plusieurs méthodes permettant de déterminer la taille, le rendement et le type de codage spatio-temporel. Celles-ci utilisent le maximum de

vraisemblance [CYC<sup>+</sup>08] ou des outils de reconnaissances de formes [CYC<sup>+</sup>08, CYCB08b]. Ces deux méthodes permettent d'identifier les codes spatio-temporels, le code d'Alamouti et les différents codes de Tarokh.

### 1.4.3 Reconnaissance de la modulation

La littérature dans ce domaine est très riche, en particulier pour les communications SISO. Ainsi, une multitude de travaux reposant sur des approches par maximum de vraisemblance ou par outils de reconnaissance de formes sont proposés. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer à [Cho08]. En ce qui concerne les communications MIMO, les méthodes proposées sont beaucoup plus rares [SBS00, CAY<sup>+</sup>08]. Celles-ci utilisent un algorithme de séparation aveugle de sources pour pouvoir caractériser la modulation : Swami [SBS00] détermine le type de modulation à l'aide de cumulants normalisés et Choqueuse [CAY<sup>+</sup>08] utilise la séparation aveugle de sources pour obtenir une estimée du canal de transmission. Ce dernier considère différentes méthodes suivant le type de code MIMO utilisé en émission. Ces méthodes permettent de reconnaître des constellations QPSK, PSK et enfin QAM.

### 1.4.4 L'estimation des symboles transmis

L'estimation des symboles transmis de manière aveugle fait l'objet de cette thèse. Ainsi nous allons voir dans le chapitre suivant que les méthodes de séparation aveugle de sources permettent d'estimer les symboles transmis en ne connaissant que le nombre d'antennes, la modulation et le code MIMO utilisés en émission.

## 1.5 Conclusion

Ce chapitre nous a permis d'introduire une modélisation des systèmes MIMO sous forme matricielle que nous utiliserons tout au long de ce mémoire. Nous avons présenté certains types d'atténuation que peuvent subir les signaux transmis, par la suite tous ces types de canaux seront considérés. Les techniques de codage MIMO, utilisées dans ce document, ont été introduites et seront reprises dans les chapitres 3 et 5. Ce chapitre a aussi permis de décrire différentes techniques d'égalisation. Finalement, nous avons abordé la problématique de cette thèse qui est l'estimation des sources transmises dans un contexte d'interception. Pour ce faire, l'une des méthodes les plus étudiées est la séparation aveugle de sources, le chapitre suivant présente le principe de cette méthode, ses limites et les problématiques qui en découlent ainsi qu'une étude bibliographique de différents algorithmes.

## Chapitre 2

# La séparation aveugle de sources

Ce chapitre vise à se familiariser avec les techniques de séparation aveugle de sources. On appelle séparation aveugle de sources l'ensemble des méthodes qui permettent de séparer un mélange de signaux sans connaissance sur ce mélange et sur les signaux sources. Ainsi, la BSS<sup>(1)</sup> est utilisée dans de nombreuses applications comme le traitement de la parole, des signaux médicaux, des signaux radar, d'image ainsi que les signaux issus des systèmes de communication. Dans ce dernier domaine d'application, elle a tout d'abord été utilisée pour séparer des signaux issus d'un mélange SISO convolutif. Puis, elle a été employée dans des systèmes MIMO pour séparer les différentes sources transmises à l'aide de plusieurs antennes.

La raison qui motive l'utilisation de la BSS dans cette thèse est le contexte d'interception, c'est à dire qu'aucun symbole pilote n'est disponible à la réception. Le nombre d'antennes émettrices, le type de code MIMO et le type de modulation sont supposés avoir été estimés lors d'une première phase. Ainsi, nous devons estimer de manière aveugle, i.e. sans connaissance sur le canal de transmission, les sources transmises sur un canal MIMO.

Nous commencerons par présenter le principe de la BSS, ainsi que les hypothèses nécessaires au bon fonctionnement des algorithmes. Nous exposerons ensuite les traitements utilisés autour de l'algorithme de séparation qui sont nécessaires pour séparer convenablement les sources. Finalement, nous décrirons les principaux algorithmes de BSS, notamment les algorithmes basés sur l'ICA, sur le module constant et sur la norme constante des sources.

### 2.1 Principe

Dans une structure de communication MIMO à  $N_t$  antennes en émission et à  $N_r$  antennes en réception ( $N_r \geq N_t$ ) la séparation aveugle de sources permet de retrouver les  $N_t$  signaux sources à partir des  $N_r$  signaux reçus. La relation liant les signaux émis  $\mathbf{s}(k) = (s_1(k) \dots s_{N_t}(k))^T$  aux signaux reçus  $\mathbf{y}(k) = (y_1(k) \dots y_{N_r}(k))^T$  d'un système de transmission MIMO décrit au chapitre 1 est donnée par :

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{H}\mathbf{s}(k) + \mathbf{b}(k)$$

---

<sup>(1)</sup>Blind Source Separation

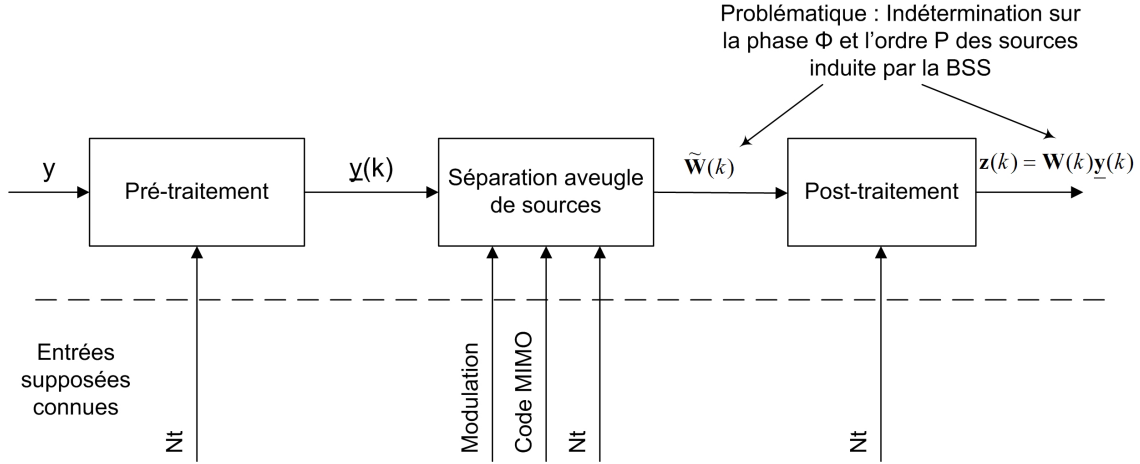


FIG. 2.1 – Synopsis de la BSS

La séparation aveugle de sources consiste à estimer une matrice de séparation  $\mathbf{W}$  de dimension  $N_r \times N_t$  à appliquer aux symboles reçus  $\mathbf{y}(k)$  afin d'obtenir une estimée  $\mathbf{z}(k)$  des symboles transmis :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{z}(k) &= \mathbf{W}^H \mathbf{y}(k) \\
 &= \mathbf{W}^H \mathbf{H} \mathbf{s}(k) + \mathbf{W}^H \mathbf{b}(k) \\
 &= \mathbf{G}^H \mathbf{s}(k) + \mathbf{b}'(k)
 \end{aligned}$$

où  $\mathbf{G} = \mathbf{H}^H \mathbf{W}$  et  $\mathbf{b}'(k) = \mathbf{W}^H \mathbf{b}(k)$ . Idéalement, la matrice globale de séparation  $\mathbf{G}$  doit tendre vers la matrice identité :  $\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{I}_{N_t}$ . Cependant, nous verrons dans le paragraphe 2.3 qu'il existe des indéterminations inhérentes à la BSS. D'autre part, les algorithmes de BSS utilisés seuls peuvent converger vers une matrice  $\mathbf{W}$  liée, cela se traduit en sortie de la BSS par la récupération de plusieurs fois la même source. Pour palier cet inconvénient, on doit forcer la BSS à obtenir des sources décorréées, i.e.  $\mathbf{W}$  doit être de rang plein. Certaines méthodes complémentaires à la BSS, appelées post-traitement, permettent d'obtenir une décorrélation des sources mais supposent le canal de transmission unitaire. Cette situation étant peu réaliste, les signaux reçus  $\mathbf{y}(k)$  seront blanchis. Ce blanchiment correspond au pré-traitement. Le synopsis de la BSS global est présenté figure 2.1. Les méthodes de pré et post-traitement sont détaillées dans le paragraphe 2.4.

## 2.2 Hypothèses

Afin d'effectuer la séparation aveugle de sources quelques hypothèses doivent être vérifiées :

- Les sources sont supposées mutuellement indépendantes à un instant donné, et ont une puissance unitaire, i.e.  $E[\mathbf{s}\mathbf{s}^H] = \mathbf{I}_{N_t}$ . Au plus, un seul signal source a une distribution gaussienne,
- Le canal  $\mathbf{H}$  est de rang complet  $N_t$ ,
- Le bruit  $\mathbf{b}(k)$  est additif et indépendant des sources,
- $N_r \geq N_t$ .

## 2.3 Indéterminations

La séparation aveugle de sources permet d'estimer les sources mais seulement à une permutation, rotation et amplitude près. Ainsi, les signaux estimés peuvent s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{z}(k) = \Phi \mathbf{P} \mathbf{s}(k) + \mathbf{b}'(k)$$

i.e., après convergence  $\mathbf{G} = \Phi \mathbf{P}$ , où  $\Phi$  est une matrice diagonale de dimension  $N_t \times N_t$  représentant l'indétermination sur la phase et l'amplitude; et  $\mathbf{P}$  est une matrice de dimension  $N_t \times N_t$  représentant les permutations.

## 2.4 Pré et post traitements

De manière générale, les algorithmes de BSS se découpent en trois étapes (figure 2.1). La première consiste à blanchir les signaux reçus, puis une fonction de coût est minimisée à l'aide d'un algorithme d'optimisation, et enfin, la dernière étape assure l'obtention de signaux indépendants en sortie de l'égaliseur. Cependant, tous les algorithmes de BSS ne contiennent pas les étapes de pré-traitement et/ou de post-traitement. Nous allons maintenant décrire dans ce paragraphe les différentes méthodes de pré et post-traitement qui existent.

### 2.4.1 Le blanchiment

L'étape de blanchiment des signaux reçus permet d'obtenir un processus  $\underline{\mathbf{y}} = \mathbf{B} \mathbf{y}$  décorrélé spatialement. Ce pré-traitement permet de réduire la matrice de mélange  $\mathbf{H}$  de dimension  $N_r \times N_t$  à une matrice unitaire  $\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{B} \mathbf{H}$  de dimension  $N_t \times N_t$ , limitant ainsi les solutions indésirables liées à la dimension rectangulaire de la matrice de canal. Ainsi, la matrice de blanchiment  $\mathbf{B}$  est choisie de manière à obtenir une matrice de corrélation des signaux blanchis  $\underline{\mathbf{y}}$  unitaire, c'est à dire :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{yy} &= E [\underline{\mathbf{y}} \underline{\mathbf{y}}^H] \\ &= E [\mathbf{B} \mathbf{y} \mathbf{y}^H \mathbf{B}^H] \\ &= \mathbf{B} \mathbf{R}_{yy} \mathbf{B}^H \\ &= \mathbf{I} \end{aligned}$$

où  $\mathbf{R}_{yy} = \mathbf{H} \mathbf{H}^H + \sigma_b^2 \mathbf{I}$  en supposant que la puissance des symboles transmis est unitaire et que la puissance du bruit est  $\sigma_b^2$ . Une matrice  $\mathbf{B}$  qui blanchit les signaux reçus  $\mathbf{y}$  est donnée par :

$$\mathbf{B} = \mathbf{\Lambda}^{-1/2} \mathbf{U}^H$$

où la matrice orthogonale  $\mathbf{U}$  et la matrice diagonale  $\mathbf{\Lambda}$  contiennent respectivement les vecteurs propres et les valeurs propres de  $\mathbf{R}_{yy}$ . On obtient alors les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{yy} &= \mathbf{B} \mathbf{R}_{yy} \mathbf{B}^H \\ &= \mathbf{\Lambda}^{-1/2} \mathbf{U}^H (\mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^H) \mathbf{U} \mathbf{\Lambda}^{-1/2} \\ &= \mathbf{I} \end{aligned}$$

La matrice  $\mathbf{B}$  blanchit donc bien les signaux reçus  $\mathbf{y}$ .

Plusieurs méthodes existent pour estimer la matrice de blanchiment  $\mathbf{B}$ , l'une par blocs et l'autre adaptative. Le choix de l'algorithme de blanchiment se fera selon l'algorithme de séparation utilisé. Ainsi, nous utiliserons un blanchiment adaptatif lorsque l'algorithme de séparation est adaptatif et un blanchiment par blocs associé à une séparation en blocs.

#### 2.4.1.1 Le blanchiment par blocs

Les matrices  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{\Lambda}$  sont obtenues en effectuant une décomposition en valeurs propres de la matrice de corrélation  $\mathbf{R}_{yy}$  des signaux reçus. Lorsque  $N_t = N_r$ , la matrice de blanchiment est obtenue simplement par  $\mathbf{B} = \mathbf{\Lambda}^{-1/2} \mathbf{U}^H$ .

Par contre, si  $N_r > N_t$ , la matrice de blanchiment sera obtenue à l'aide du sous-espace signal. On définit alors :

$$\mathbf{U} = (\mathbf{U}_s \ \mathbf{U}_b), \text{ et } \mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Lambda}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda}_b \end{pmatrix}$$

où  $\mathbf{\Lambda}_s$  contient les  $N_t$  valeurs propres ordonnées en ordre décroissant et  $\mathbf{U}_s$  les vecteurs propres qui lui sont associés. Le sous-espace signal est généré par  $\mathbf{U}_s$  et le sous-espace bruit par  $\mathbf{U}_b$ . La matrice de blanchiment  $\mathbf{B}$  est donnée par :

$$\mathbf{B} = (\mathbf{\Lambda}_s - \hat{\sigma}_b^2 \mathbf{I})^{-1/2} \mathbf{U}_s^H$$

où la variance du bruit  $\hat{\sigma}_b$  est estimée par :

$$\hat{\sigma}_b^2 = \frac{\text{trace}(\mathbf{\Lambda}_b)}{N_r - N_t}$$

#### 2.4.1.2 Le blanchiment adaptatif

Le principe de l'algorithme PAST est de trouver une matrice  $\mathbf{U}$  de dimension  $N_r \times N_t$  qui minimise le critère :

$$J_{PAST}(\mathbf{U}) = E \left[ \|\mathbf{y} - \mathbf{U} \mathbf{U}^H \mathbf{y}\|^2 \right]$$

La matrice  $\mathbf{U}$  est orthogonale et ses colonnes engendrent le sous-espace principal de  $E[\mathbf{y} \mathbf{y}^H]$ . Pour obtenir un algorithme adaptatif, un certain nombre de modifications doivent être faites. Tout d'abord, le problème est reformulé comme un problème des moindres carrés :

$$J_{PAST}(\mathbf{U}(k)) = \sum_{n=1}^k \lambda^{k-n} \|\mathbf{y}(n) - \mathbf{U}(k) \mathbf{U}(k)^H \mathbf{y}(n)\|^2$$

Puis le vecteur  $\mathbf{U}(k)^H \mathbf{y}(n)$  est estimé par  $\mathbf{v}(n) = \mathbf{U}(n-1)^H \mathbf{y}(n)$ . Ainsi, la fonction de coût utilisée dans l'algorithme PAST s'exprime sous la forme standard d'un problème des moindres carrés :

$$J_{PAST}(\mathbf{U}(k)) = \sum_{n=1}^k \lambda^{k-n} \|\mathbf{y}(n) - \mathbf{U}(k) \mathbf{v}(n)\|^2$$

La matrice  $\mathbf{U}(k)$  minimisant cette fonction de coût est :

$$\mathbf{U}(k) = \hat{\mathbf{R}}_{yv}(k) \hat{\mathbf{R}}_v^{-1}(k)$$

où  $\hat{\mathbf{R}}_{yv}(k) = \sum_{n=1}^k \lambda^{k-n} \mathbf{y}(n) \mathbf{v}^H(n)$ ,  $\hat{\mathbf{R}}_v(k) = \sum_{n=1}^k \lambda^{k-n} \mathbf{v}(n) \mathbf{v}^H(n)$ .  
La mise à jour récursive de  $\mathbf{U}(k)$  est obtenue par :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(k) &= \mathbf{U}^H(k-1) \mathbf{y}(k) \\ \mathbf{e}(k) &= \mathbf{y}(k-1) - \mathbf{U}(k-1) \mathbf{v}(k) \\ \mathbf{k}(k) &= \frac{\hat{\mathbf{R}}_v^{-1}(k-1) \mathbf{v}(k)}{\lambda + \mathbf{v}^H(k) \hat{\mathbf{R}}_v^{-1}(k-1) \mathbf{v}(k)} \\ \hat{\mathbf{R}}_v^{-1}(k) &= \lambda^{-1} \left( \hat{\mathbf{R}}_v^{-1}(k-1) - \mathbf{k}(k) \mathbf{v}^H(k) \hat{\mathbf{R}}_v^{-1}(k-1) \right) \\ \mathbf{U}(k) &= \mathbf{U}(k-1) + \mathbf{e}(k) \mathbf{k}^H(k) \end{aligned}$$

où  $\mathbf{e}(k)$  représente le sous espace d'erreur. Bien que  $\mathbf{U}(k)$  converge vers une matrice orthogonale lorsque  $k \rightarrow \infty$  et  $\lambda = 1$ , cet algorithme n'assure pas l'orthogonalité de  $\mathbf{U}(k)$  à chaque itération. Douglas a proposé dans [Dou00] d'utiliser la transformation de Householder afin d'obtenir à chaque itération une matrice  $\mathbf{U}(k)$  orthogonale. L'équation et la transformation de Householder sont données respectivement par :

$$\mathbf{p}(k) = \mathbf{e}(k) - \frac{\|\mathbf{e}(k)\|^2}{2} \mathbf{U}(k-1) \mathbf{k}(k)$$

et

$$\mathbf{U}(k) = \left( \mathbf{I} - 2 \frac{\mathbf{p}(k) \mathbf{p}^H(k)}{\|\mathbf{p}(k)\|^2} \right) \mathbf{U}(k-1)$$

Puisque  $\mathbf{e}^H(k-1) \mathbf{U}(k-1) = \mathbf{0}$ , on obtient la mise à jour de  $\mathbf{U}(k)$  du nouvel algorithme :

$$\mathbf{U}(k) = \mathbf{U}(k-1) + \frac{\mathbf{p}(k) \mathbf{k}^H(k)}{1 + 0.25 \|\mathbf{e}(k)\|^2 \|\mathbf{k}(k)\|^2}$$

Le vecteur  $\mathbf{v}(k)$  peut maintenant être blanchi à l'aide d'un filtre adaptatif  $\mathbf{B}'(k)$  de dimension  $N_t \times N_t$  :  $\underline{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{B}'^H(k-1) \mathbf{v}(k)$ . La matrice de covariance des signaux blanchis est alors :  $E[\underline{\mathbf{y}}(k) \underline{\mathbf{y}}^H(k)] = \mathbf{I}$ , c'est à dire  $\mathbf{B}'^H(k) \mathbf{R}_v(k) \mathbf{B}'(k) = \mathbf{I}$ , ou encore :

$$\mathbf{B}'(k) \mathbf{B}'^H(k) = \hat{\mathbf{R}}_v^{-1}(k) \quad (2.1)$$

Ainsi, en substituant 2.1 dans la mise à jour de  $\hat{\mathbf{R}}_v^{-1}(k)$ , on obtient :

$$\mathbf{B}'(k) \mathbf{B}'^H(k) = \lambda^{-1} \mathbf{B}'(k-1) \left( \mathbf{I} - \frac{\underline{\mathbf{y}}(k) \underline{\mathbf{y}}^H(k)}{\lambda + \|\underline{\mathbf{y}}(k)\|^2} \right) \mathbf{B}'^H(k-1) \quad (2.2)$$

Soit  $\Xi$  la racine carré du terme entre parenthèses, ainsi l'équation 2.2 implique :

$$\mathbf{B}'(k) = \lambda^{-1/2} \mathbf{B}'(k-1) \Xi(k)$$

où

$$\Xi(k) = \left( \mathbf{I} - \frac{\underline{\mathbf{y}}(k) \underline{\mathbf{y}}^H(k)}{\|\underline{\mathbf{y}}(k)\|^2} \right) + \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + \|\underline{\mathbf{y}}(k)\|^2}} \frac{\underline{\mathbf{y}}(k) \underline{\mathbf{y}}^H(k)}{\|\underline{\mathbf{y}}(k)\|^2}$$



**Initialisation**  $\mathbf{U} = \mathbf{I}_{N_r \times N_t}$ ,  $\mathbf{B}' = \delta^{-1} \mathbf{I}_{N_t \times N_t}$ , où  $\delta$  est très petit,  $\alpha^2 = 0$

**Pour**  $k = 1, 2, \dots$

1.  $\mathbf{v} = \mathbf{U}^H \mathbf{y}(k)$ ,  
 $\underline{\mathbf{y}} = \mathbf{B}'^H \mathbf{v}$ ,  
 $\mathbf{n} = \mathbf{B}' \underline{\mathbf{y}}$ ,
2.  $\mathbf{k} = \frac{1}{\lambda + \|\underline{\mathbf{y}}\|^2} \mathbf{n}$ ,  
 $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{U} \mathbf{v}$ ,  
 $\mathbf{p} = \mathbf{e} - \frac{\|\mathbf{e}\|^2}{2} \mathbf{U} \mathbf{k}$ ,  
 $\mathbf{U} = \mathbf{U} + \frac{1}{1 + 0.25 \|\mathbf{e}\|^2 \|\mathbf{k}\|^2} \mathbf{p} \mathbf{k}^H$ ,
3.  $\xi = \frac{1}{\lambda + \|\underline{\mathbf{y}}\|^2 + \sqrt{\lambda} \sqrt{\lambda + \|\underline{\mathbf{y}}\|^2}}$ ,  
 $\mathbf{B}' = \lambda^{-1/2} (\mathbf{B}' - \xi \mathbf{n} \underline{\mathbf{y}}^H)$ ,
4.  $\alpha^2 = \lambda \alpha^2 + 1$ ,  
 $\underline{\mathbf{y}}(k) = \alpha \underline{\mathbf{y}}$

FIG. 2.2 – Algorithme de blanchiment adaptatif

On obtient alors la mise à jour suivante :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{n}(k) &= \mathbf{B}'(k-1) \underline{\mathbf{y}}(k) \\
 \xi(k) &= \frac{1}{\lambda + \|\underline{\mathbf{y}}(k)\|^2 + \sqrt{\lambda} \sqrt{\lambda + \|\underline{\mathbf{y}}(k)\|^2}} \\
 \mathbf{B}'(k) &= \lambda^{-1/2} (\mathbf{B}'(k-1) - \xi(k) \mathbf{n}(k) \underline{\mathbf{y}}^H(k))
 \end{aligned}$$

Finalement, du fait de la définition de  $\hat{\mathbf{R}}_v(k)$ , l'estimation de  $\mathbf{R}_v(k)$  converge vers  $1/(1 - \lambda) \mathbf{R}_v(k)$  au lieu de  $\mathbf{R}_v(k)$ . En prenant ce facteur d'échelle en compte, les vecteurs blanchis sont multipliés par un facteur d'échelle  $\alpha(k)$ , où

$$\alpha^2(k) = \lambda \alpha^2(k-1) + 1, \quad \alpha(0) = 0$$

La sortie du filtre de blanchiment est donnée par  $\underline{\mathbf{y}}(k) = \alpha(k) \mathbf{B}^H(k) \mathbf{y}(k)$  avec  $\mathbf{B}(k) = \mathbf{U}(k) \mathbf{B}'(k)$ . L'algorithme résultant est donné par la figure 2.2.

## 2.4.2 Décorrélacion et orthogonalisation

Le post-traitement permet d'obtenir en sortie de la BSS tous les signaux sources. Deux méthodes peuvent être utilisées pour obtenir l'indépendance des signaux en sortie du filtre de BSS, la première est basée sur un critère de décorrélacion et la seconde sur une contrainte d'orthogonalisation.

### 2.4.2.1 Décorrélacion

La décorrélacion des sorties de l'égaliseur est obtenue en rajoutant un terme de décorrélacion au critère de séparation à minimiser [CED97, PP97]. La minimisation de ce nouveau critère conduit à l'obtention de signaux séparés et décorrélés à la sortie de l'égaliseur sans

utiliser nécessairement un pré-blanchiment des observations. Le critère à minimiser pour la décorrélation est donné par la relation suivante :

$$J_{corr} = \sum_{m=1}^{N_t} \sum_{n=1, n \neq m}^{N_t} |z_m(k) z_n^*(k)|^2$$

où  $z_m(k) = \mathbf{w}_m^H(k) \mathbf{y}(k)$  représente la  $m^{\text{ième}}$  sortie du filtre de séparation.

#### 2.4.2.2 Orthogonalisation

L'orthogonalisation de la matrice de séparation découle directement des conditions nécessaires et suffisantes pour retrouver des sources indépendantes en sortie de l'égaliseur :

**C 1**  $E[z_n(k)]^2 = \sigma_s^2, n = 1, \dots, N_t$  avec  $\sigma_s^2$  la variance des signaux sources

**C 2**  $E[z_n z_m^*(k)] = 0, n \neq m$

Il en découle l'égalité suivante :

$$E[\mathbf{z} \mathbf{z}^H] = \sigma_s^2 \mathbf{I}_{N_t}$$

En l'absence de bruit, on obtient :

$$\begin{aligned} E[\mathbf{z} \mathbf{z}^H] &= E[\mathbf{G}^H \mathbf{s} \mathbf{s}^H \mathbf{G}] \\ &= \sigma_s^2 \mathbf{G}^H \mathbf{G} \end{aligned}$$

On en déduit :  $\mathbf{G}^H \mathbf{G} = \mathbf{I}_{N_t}$ . Cependant, puisque la matrice de canal est inconnue, il nous faut une contrainte portant uniquement sur la matrice de séparation  $\mathbf{W}$  :

$$\mathbf{G} = \mathbf{H}^H \mathbf{W} \Rightarrow \mathbf{W}^H \mathbf{H} \mathbf{H}^H \mathbf{W} = \mathbf{I}_{N_t}$$

En ayant au préalable pré-blanchis les signaux reçus, la matrice de canal devient unitaire, i.e.  $\mathbf{H} \mathbf{H}^H = \mathbf{I}_{N_t}$ , la contrainte permettant d'obtenir des signaux indépendants en sortie de l'égaliseur devient :

$$\mathbf{W}^H \mathbf{W} = \mathbf{I}_{N_t}$$

Par la suite, nous nommerons  $\tilde{\mathbf{W}}(k)$  la matrice issue de l'algorithme de séparation et  $\mathbf{W}(k)$  la version orthogonalisée de  $\tilde{\mathbf{W}}(k)$ .

Pour ce faire plusieurs méthodes existent, l'une basée sur la minimisation du critère  $\|\mathbf{W}(k) - \tilde{\mathbf{W}}(k)\|^2$  et l'autre sur la minimisation de  $\|\mathbf{W}(k) - \mathbf{W}(k-1)\|$  à chaque itération.

##### 1. Méthode basée sur la minimisation de $\|\mathbf{W}(k) - \tilde{\mathbf{W}}(k)\|^2$

Dans [Pap00], Papadias propose d'obtenir l'orthogonalisation de la matrice de séparation  $\tilde{\mathbf{W}}(k)$  tout en minimisant la distance entre la matrice orthonormale  $\mathbf{W}(k)$  et la matrice  $\tilde{\mathbf{W}}(k)$  au sens de la norme euclidienne :

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{W}} \Delta(\mathbf{W}) = \|\mathbf{W}(k) - \tilde{\mathbf{W}}(k)\|^2 \\ \text{sous } \mathbf{W}^H \mathbf{W} = \mathbf{I}_{N_t} \end{cases}$$

Papadias montre que la minimisation de ce critère peut être obtenue par une orthogonalisation de Gram-Schmidt, donnée par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{W}}(k) &= (\tilde{\mathbf{w}}_1(k) \dots \tilde{\mathbf{w}}_{N_t}(k)) \\ \tilde{\mathbf{w}}_1(k) &= \tilde{\mathbf{w}}_1(k) / \|\tilde{\mathbf{w}}_1(k)\| \\ \text{Pour } n &= 2 \text{ à } N_t, \\ \tilde{\mathbf{w}}_n(k) &= \frac{\tilde{\mathbf{w}}_n(k) - \sum_{m=1}^{n-1} (\mathbf{w}_m^H(k) \tilde{\mathbf{w}}_n(k)) \mathbf{w}_m(k)}{\|\tilde{\mathbf{w}}_n(k) - \sum_{m=1}^{n-1} (\mathbf{w}_m^H(k) \tilde{\mathbf{w}}_n(k)) \mathbf{w}_m(k)\|} \\ \mathbf{W}(k) &= (\mathbf{w}_1(k) \dots \mathbf{w}_{N_t}(k))\end{aligned}$$

Cependant, cette méthode utilise uniquement la matrice à orthogonaliser à l'itération actuelle, ce qui conduit à une discontinuité entre  $\mathbf{W}(k)$  et  $\mathbf{W}(k+1)$ , en particulier en présence de perturbations. Ainsi, Abed-Meraim propose dans [AMCHA02] une méthode minimisant  $\|\mathbf{W}(k+1) - \mathbf{W}(k)\|^2$  à chaque itération, dans [IMG07a] cette méthode a été adaptée à la séparation aveugle de sources.

## 2. Méthode basée sur la minimisation de $\|\mathbf{W}(k+1) - \mathbf{W}(k)\|^2$

La procédure d'orthogonalisation utilisée dans [AMCHA02] et [IMG07a] est la suivante :

$$\mathbf{W}(k) = \tilde{\mathbf{W}}(k) \left( \tilde{\mathbf{W}}^H(k) \tilde{\mathbf{W}}(k) \right)^{-1/2} \quad (2.3)$$

En supposant que l'algorithme de BSS considéré utilise un gradient stochastique, la mise à jour de  $\tilde{\mathbf{W}}(k)$  est donnée par :

$$\tilde{\mathbf{W}}(k) = \mathbf{W}(k-1) - \mu \mathbf{y}(k) \mathbf{e}(k)$$

avec  $\mathbf{e}(k) = (e_1(k) \dots e_{N_t}(k))$ .

En reprenant l'équation 2.3, nous obtenons :

$$\left( \tilde{\mathbf{W}}^H(k) \tilde{\mathbf{W}}(k) \right)^{-1/2} = \left[ (\mathbf{W}^H(k-1) - \mu \mathbf{e}^H(k) \mathbf{y}^H(k)) (\mathbf{W}(k-1) - \mu \mathbf{y}(k) \mathbf{e}(k)) \right]^{-1/2} \quad (2.4)$$

En posant  $\mathbf{y}'(k) = -\mu \mathbf{W}^H(k-1) \mathbf{y}(k)$  et puisque  $\mathbf{W}^H(k-1) \mathbf{W}(k-1) = \mathbf{I}$ , on peut réécrire 2.4 :

$$\left( \tilde{\mathbf{W}}^H(k) \tilde{\mathbf{W}}(k) \right)^{-1/2} = (\mathbf{I} + \mu \|\mathbf{y}(k)\| \mathbf{e}(k) \mathbf{e}^H(k) + \mathbf{e}(k) \mathbf{y}'^H(k) + \mathbf{y}'(k) \mathbf{e}^H(k))^{-1/2}$$

Soit  $\Phi = \mu \|\mathbf{y}(k)\| \mathbf{e}(k) \mathbf{e}^H(k) + \mathbf{e}(k) \mathbf{y}'^H(k) + \mathbf{y}'(k) \mathbf{e}^H(k)$ , ainsi :

$$\left( \tilde{\mathbf{W}}^H(k) \tilde{\mathbf{W}}(k) \right)^{-1/2} = (\mathbf{I} + \Phi)^{-1/2} \quad (2.5)$$

La matrice  $\Phi$  est Hermitienne et de rang 2, ainsi nous pouvons l'écrire sous la forme :

$$\Phi = \mathbf{P} \mathbf{\Lambda} \mathbf{P}^H$$

où  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$  et  $\mathbf{P} = (\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2)$  contient les 2 vecteurs propres de  $\Phi$  associés aux valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .

D'après le théorème défini dans [IMG07a], 2.5 devient :

$$\left( \tilde{\mathbf{W}}^H(k) \tilde{\mathbf{W}}(k) \right)^{-1/2} = (\mathbf{I} + \mathbf{P} \mathbf{\Lambda}' \mathbf{P}^H)$$

$$\text{avec } \mathbf{\Lambda}' = \text{diag} \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda_1+1}} - 1, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2+1}} - 1 \right).$$

Finalement, la mise à jour de la matrice de séparation s'obtient par :

$$\mathbf{W}(k) = (\mathbf{W}(k-1) - \mu \mathbf{y}(k) \mathbf{e}(k)) (\mathbf{I} + \mathbf{P} \mathbf{\Lambda}' \mathbf{P}^H)$$

Ikhlef a proposé dans [Ikh08] une autre technique minimisant  $\|\mathbf{W}(k+1) - \mathbf{W}(k)\|^2$ , cette technique d'orthogonalisation, basée sur [Hua04], est réalisée asymptotiquement et non à chaque itération.

## 2.5 Fonctions de contraste utilisées pour la séparation

Certaines méthodes de séparation aveugle de sources exposées dans ce chapitre font appel à des fonctions de contraste (ou coût) introduites par Comon en 1994 [Com94]. La définition donnée par Comon est la suivante :

**Loi 1** Une fonction de contraste est une fonction  $\Psi$  de l'ensemble  $S$  des vecteurs aléatoires à composantes gaussiennes dans  $\mathbb{R}$  qui satisfait les propriétés suivantes :

1.  $\Psi$  est invariante par permutation :  $\forall s \in S, \Psi(Ps) = \Psi(s)$ , pour toute matrice  $P$  de permutation.
2.  $\Psi$  est invariante par changement d'échelle :  $\forall s \in S, \Psi(\Phi s) = \Psi(s)$ , pour toute matrice  $\Phi$  diagonale.
3. Si les composantes de  $s$  sont indépendantes alors :
  - $\Psi(Ms) \leq \Psi(s)$  pour toute matrice  $M$  inversible.
  - $\Psi(Ms) = \Psi(s) \Leftrightarrow M = P\Phi$

La dernière condition indique qu'il s'agit de maximiser la fonction de contraste afin d'obtenir la matrice  $M$  adéquate.

### 2.5.1 La séparation par analyse en composantes indépendantes

Le principe de l'ICA<sup>(2)</sup> est d'appliquer des transformations aux signaux reçus afin d'obtenir des signaux statistiquement indépendants. Il est donc nécessaire de pouvoir mesurer l'indépendance statistique de signaux.

Par définition, des variables aléatoires  $\{u_n\}$ ,  $n = 1 \dots p$  sont statistiquement indépendantes si et seulement si :

$$p(u_1, \dots, u_p) = \prod_{n=1}^p p(u_n)$$

---

<sup>(2)</sup>Independent Components Analysis

Par conséquent l'indépendance statistique implique la décorrélation, mais l'inverse n'est pas vrai, sauf dans le cas de vecteurs aléatoires gaussiens.

Le principe de l'ICA a été utilisé pour de nombreux algorithmes de séparation de sources. Parmi eux, nous pouvons citer les méthodes basées sur la théorie de l'information [Com94, GL90, PGJ92, Car97, MCG97, DH97] et notamment l'algorithme InfoMax proposée par Bell et Sejnowski [BS95]. D'autres méthodes basées sur les statistiques d'ordre 2 et 3 ont été proposées, mais celles-ci sont généralement insuffisantes pour la séparation de signaux, à moins de rajouter des conditions nécessaires et suffisantes [SS00, MKO99]. Les moments et cumulants croisés d'ordres supérieurs peuvent aussi être utilisés dans les méthodes basées sur l'ICA, c'est le cas de l'algorithme FOBI<sup>(3)</sup> [Car89, Car92] et de l'algorithme JADE<sup>(4)</sup> [CS93] créés par Cardoso.

### 2.5.1.1 Un critère basé sur le Kurtosis

Enfin, les méthodes basées sur les autocumulants d'ordre 4 ont été introduites par Wiggins [Wig78] en 1978. Ce dernier utilise un critère proche du kurtosis afin de séparer des mélanges convolutifs mais dans les cas SISO<sup>(5)</sup> :

$$J(z) = \frac{E[z^4]}{(E[z^2])^2}$$

En effet, d'après le théorème de la centrale-limite, les signaux reçus tendent vers une loi gaussienne puisqu'ils sont issus d'un mélange. Ainsi, pour séparer ce mélange il faut s'éloigner le plus possible de la loi gaussienne et donc maximiser le module du Kurtosis étant donné que :

- $K_n(z) > 0$  les signaux sont sur-gaussiens
- $K_n(z) = 0$  les signaux sont gaussiens
- $K_n(z) < 0$  les signaux sont sous-gaussiens

Le kurtosis normalisé s'écrivant de la manière suivante :

$$K_n(z) = \frac{Cum_4(z)}{Cum_2(z)^2}, \text{ avec } E[z] = 0$$

et le kurtosis non-normalisé :

$$K(z) = E[|z|^4] - 2E^2[|z|^2] - |E[z^2]|^2 = Cum_4(z)$$

Loubaton, Regalia et Delfosse [DL95, LR93] ont par la suite utilisé le kurtosis non normalisé afin de séparer des signaux MIMO convolutifs. Cependant, cette approche n'a été développée que pour des signaux réels avec  $N_t = N_r$ . Par la suite, Tugnait a proposé de maximiser le module du Kurtosis normalisé de la sortie de l'égaliseur [Tug97]. Puis Deville et al. ont proposé de tenir compte du signe du Kurtosis afin d'extraire au choix des sources sur-gaussiennes ou sous-gaussiennes [Dev99, DAB00, DB00]. Par la suite Papadias réutilise le Kurtosis non-normalisé [Pap00] qui représente une extension de l'algo proposé par

---

<sup>(3)</sup>Fourth Order Blind Identification

<sup>(4)</sup>Joint Approximate Diagonalization of Eigen-matrices

<sup>(5)</sup>Single Input Single Output

Shalvi [SW90] et cherche à maximiser son module afin de séparer des signaux complexes issus d'un mélange instantané. Il montre la convergence de cet algorithme appelé MUK<sup>(6)</sup> pour un nombre arbitraire d'antennes.

### 2.5.1.2 L'algorithme MUK

Cet algorithme est basé sur des conditions nécessaires et suffisantes pour pouvoir séparer les sources. En effet, si chaque source  $s_n(k)$  transmise sur la  $n^e$  antenne est une séquence identiquement distribuée de moyenne nulle et que les sources transmises à l'instant  $k$  sont statistiquement indépendantes et possèdent la même distribution alors l'ensemble des conditions nécessaires et suffisantes pour retrouver tous les signaux sources à partir des sorties de l'égaliseur sont les suivantes :

$$\mathbf{C\ 1} \quad E \left[ |z_n(k)|^2 \right] = \sigma_s^2, \text{ avec } \sigma_s^2 \text{ la variance des sources, } \forall n \in [1, \dots, N_t]$$

$$\mathbf{C\ 2} \quad E [z_n(k)z_m^*(k)] = 0, \quad n, m = 1, \dots, N_t, \quad m \neq n$$

$$\mathbf{C\ 3} \quad |K(z_n(k))| = |K_s|, \quad n = 1, \dots, N_t \text{ avec } K_s \text{ le kurtosis non normalisé des sources}$$

Le critère proposé par Papadias découle directement des contraintes décrites précédemment et s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \max J_{MUK}(\mathbf{W}) = \sum_{n=1}^{N_t} |K(z_n)| \\ \text{sous } \mathbf{W}^H \mathbf{W} = \mathbf{I}_{N_t} \end{cases}$$

La contrainte découle des conditions 2. Papadias propose d'implémenter cette fonction de coût à l'aide d'un gradient stochastique (SG) à pas fixe associé à une orthogonalisation de Gram-Schmidt permettant de satisfaire la contrainte à chaque itération. Ce critère peut très bien être implémenté par d'autres méthodes décrites dans le paragraphe suivant, comme le gradient stochastique à pas variable ou encore le RLS.

## 2.5.2 Les fonctions de contraste à module constant

De nombreux signaux de télécommunication ont un module constant (PSK, 4QAM), généralement normalisé à 1. Si on représente les échantillons d'une seule source sur un plan complexe, tous les échantillons se trouvent sur un cercle unitaire, ce n'est plus le cas si on représente une combinaison linéaire de plusieurs sources. C'est cette propriété que les algorithmes à module constant exploitent. La fonction de coût CM<sup>(7)</sup> à minimiser est la suivante :

$$J_{CMA}(\mathbf{W}) = \sum_{n=1}^{N_t} E \left[ \left| |z_n(k)|^2 - R \right|^2 \right]$$

où  $R = \frac{E[|s(k)|^4]}{E[|s(k)|^2]^2}$  représente la constante de dispersion. Ce critère contraint les sorties de l'égaliseur à se trouver sur un cercle de rayon R. Cette fonction de coût permet de séparer

<sup>(6)</sup>MultiUser Kurtosis

<sup>(7)</sup>Constant Modulus

aussi bien les mélanges issus d'une constellation circulaire (PSK) que carrée (QAM). Cette fonction de coût a été initialement proposée pour des systèmes SISO dans [God80] puis dans [GL86]. Castedo a ensuite étendu ce critère aux signaux MIMO issus de mélanges instantanés.

Afin de retrouver des sources indépendantes en sortie de l'égaliseur, Castedo a proposé d'utiliser un critère basé sur l'intercorrélacion des signaux séparés (c.f. paragraphe 2.4.2). Cependant ce second critère pénalise le critère de séparation CM en terme de vitesse de convergence. Nous utiliserons donc par la suite le critère CM associé à un blanchiment et à une orthogonalisation de Gram-Schmidt (c.f. paragraphe 2.4.2). Le critère à minimiser devient :

$$\begin{cases} J_{CMA}(\mathbf{W}) = \sum_{n=1}^{N_t} E \left[ \left| |z_n(k)|^2 - R \right|^2 \right] \\ \text{sous } \mathbf{W}^H \mathbf{W} = \mathbf{I}_{N_t} \end{cases}$$

La convergence du critère CM a largement été étudiée dans un contexte d'égalisation aveugle [LT83, RS00, ZTJ99, TF99] et de séparation de sources [CED97, PP97, LC99, Ikh08]. Il en ressort que la minimisation du critère CM conduit, en l'absence de bruit, à la récupération parfaite des signaux sources à une rotation et une permutation près.

### 2.5.2.1 L'algorithme SG-CMA à pas fixe

Castedo propose dans [CED97] d'utiliser le gradient stochastique afin de minimiser le critère CM dans un contexte MIMO. Avant lui, Godard [God80] avait aussi utilisé cet algorithme sur ce même critère mais dans un contexte SISO. Dans ce cas, la mise à jour de la matrice de séparation  $\mathbf{W}$  est faite de manière adaptative :

$$\tilde{\mathbf{W}}_n(k) = \tilde{\mathbf{W}}_n(k-1) - \mu \nabla_{\mathbf{W}_n} J_{CMA}, \quad n \in \{1, \dots, N_t\}$$

où  $\mu$  représente la pas d'adaptation et  $\nabla_{\mathbf{W}_n} J_{CMA}$  le gradient de  $J_{CMA}$  défini de manière générale comme :

**Définition 2.5.1** *Le gradient  $\nabla_{\mathbf{W}} J$  de la fonction de coût  $J(\mathbf{W})$  par rapport à la matrice complexe  $\mathbf{W} = (\mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_{N_t})$ , avec  $\mathbf{W}_n$  la  $n^e$  colonne de  $\mathbf{W}$ , est défini comme :*

$$\nabla_{\mathbf{W}} J = \left( \nabla_{\mathbf{W}_1} J, \dots, \nabla_{\mathbf{W}_{N_t}} J \right)^T$$

Le vecteur  $\nabla_{\mathbf{W}_n} J$  définit le gradient de  $J$  par rapport aux variables du vecteur complexe  $\mathbf{W}_n$  comme :

$$\nabla_{\mathbf{W}_n} J = \left( \frac{\partial J}{\partial \mathbf{W}_{1n}^*} \quad \dots \quad \frac{\partial J}{\partial \mathbf{W}_{N_t n}^*} \right)^T$$

avec  $\mathbf{W}_{mn} = \mathbf{W}(m, n)$ ,  $m, n \in \{1, \dots, N_t\}$ .

En utilisant la définition et les propriétés de l'opérateur à gradient complexe décrites dans [Bra83],  $\nabla_{\mathbf{W}_n} J_{CMA}$  est donné par :

$$\nabla_{\mathbf{W}_n} J_{CMA} = E \left[ \left( |z_n(k)|^2 - R \right) z_n^*(k) \underline{\mathbf{y}}(k) \right]$$

Dans la pratique, il n'est pas concevable d'estimer à chaque instant la valeur moyenne du gradient  $\nabla_{W_n} J_{CMA}$ . Afin de réduire la complexité de calcul, la démarche de l'approximation stochastique introduite par Robbins et Monroe [RM51] est utilisée. On obtient ainsi l'algorithme du gradient stochastique à module constant :

$$\tilde{\mathbf{W}}_n(k+1) = \tilde{\mathbf{W}}_n(k) - \mu \left( |z_n(k)|^2 - R \right) z_n^*(k) \underline{\mathbf{y}}(k), \quad n \in \{1, \dots, N_t\}$$

La contrainte d'orthogonalité est ensuite satisfaite à chaque itération à l'aide d'un algorithme décrit dans le paragraphe 2.4.2.

### 2.5.2.2 L'algorithme SG-CMA à pas variable

Les algorithmes SG-CMA à pas fixe peuvent présenter plusieurs type d'inconvénients :

- Lorsque le pas d'adaptation  $\mu$  est choisi trop petit, l'algorithme converge lentement mais vers une valeur optimale. Cependant, l'algorithme peut s'arrêter sur des points indésirables et finalement ne jamais converger vers la solution.
- Lorsque le pas  $\mu$  est choisi trop élevé, l'algorithme converge, certes, rapidement mais il n'atteint pas la valeur optimale de la solution et risque de diverger. Cependant, un pas plus élevé permet à l'algorithme de ne pas s'arrêter sur des points indésirables.

Un algorithme de BSS utilisant un gradient stochastique à pas variable est un algorithme qui adapte la valeur de son pas suivant l'erreur  $e_n(k) = (|z_n(k)|^2 - R)z_n^*(k)$ . Ainsi, plus l'erreur  $e_n(k)$  est élevée et plus le pas  $\mu$  sera élevé et inversement lorsque l'erreur  $e_n(k)$  est faible.

Plusieurs algorithmes de pas adaptatif ont été proposés, comme ceux présentés dans [JHH04, AM04, KJ04] et l'OS<sup>(8)</sup>-CMA [ZC08a].

### 2.5.2.3 L'algorithme RLS-CMA

Étant donné la lenteur de convergence du gradient stochastique, Chen et al. proposent d'implémenter le critère CM en utilisant les moindres carrés récurrents [LNCX04]. Cependant, la fonction de coût  $J_{CMA}$  ne peut pas être implémentée directement par le RLS. Après avoir supposé que le canal de transmission varie très lentement, i.e.  $\mathbf{W}_m(n)^H \underline{\mathbf{y}}(k) \simeq \mathbf{W}_m(k-1)^H \underline{\mathbf{y}}(k)$ , une approximation du critère est obtenue dans [LNCX04] en remplaçant la moyenne statistique par une somme avec pondération exponentielle :

$$J_{RLS-CMA} = \sum_{k=1}^n \lambda^{n-k} \sum_{m=1}^{N_t} |\mathbf{W}_m^H(n) \mathbf{v}_m(k) - R|^2$$

avec  $\mathbf{v}_m(k) = \underline{\mathbf{y}}(k) \underline{\mathbf{y}}(k)^H \mathbf{W}_m(k-1)$ . Ainsi, lorsque  $k$  est proche de  $n$ , la valeur de  $\mathbf{W}_n(n)^H \underline{\mathbf{y}}(k) - \mathbf{W}_n(k-1)^H \underline{\mathbf{y}}(k)$  est relativement faible et lorsque  $k$  est éloigné de  $n$ , la valeur élevée de  $\mathbf{W}_n(n)^H \underline{\mathbf{y}}(k) - \mathbf{W}_n(k-1)^H \underline{\mathbf{y}}(k)$  est atténuée par le facteur d'oubli  $\lambda^{n-k}$ .

La mise à jour de la matrice de séparation est donnée par :

$$\tilde{\mathbf{W}}_m(k) = \tilde{\mathbf{W}}_m(k-1) + \mathbf{K}_m(n) \mathbf{e}_m(k)$$

---

<sup>(8)</sup>Optimal Step-Size



où

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_m(k) &= \tilde{\mathbf{W}}_m^H(k-1)\mathbf{v}_m(k) - R \\ \mathbf{K}_m(k) &= \frac{\mathbf{P}_m(k-1)\mathbf{v}_m(k)}{\lambda\mathbf{I} + \mathbf{v}_m(k)^H\mathbf{P}_m(k-1)\mathbf{v}_m(k)} \\ \mathbf{P}_m(k) &= \lambda^{-1}(\mathbf{P}_m(k-1) - \mathbf{K}_m(k)\mathbf{v}_m^H(k)\mathbf{P}_m(k-1))\end{aligned}$$

La contrainte d'orthogonalité est ensuite obtenue par une orthogonalisation de la matrice de séparation  $\tilde{\mathbf{W}}(k)$  à chaque itération.

#### 2.5.2.4 L'algorithme batch ACMA

L'algorithme ACMA<sup>(9)</sup>, proposé par Van der Veen [VP96, VDV01, VLLS05], est utilisé sur des blocs de données de taille  $N_s$ , ainsi le canal doit être stationnaire sur toute la durée du bloc. Cet algorithme utilise des outils analytiques pour minimiser le critère  $J_{CMA}$  ce qui rend sa convergence rapide même sur un faible nombre de données. Ainsi, en l'absence de bruit,  $N_t^2$  échantillons de données suffisent pour obtenir la convergence de l'algorithme. Le fonctionnement du CMA analytique par bloc sera détaillé dans le chapitre 4.

#### 2.5.2.5 L'algorithme adaptatif ACMA

Van der Veen a ensuite adapté l'algorithme ACMA pour une utilisation adaptative [VDV05, VLLS05], il n'y a alors plus de contraintes sur le canal et l'algorithme adaptive-ACMA peut être utilisé dans un environnement non stationnaire. L'ajustement de la version bloc de l'algorithme ACMA à la version adaptative sera largement décrit dans le chapitre 4.

#### 2.5.2.6 Autres algorithmes

Il existe bien d'autres algorithmes basés sur le critère à module constant. Parmi eux, l'algorithme CMA(1,2) [GL86] dont la fonction de coût à minimiser est  $J_{CMA(1,2)} = \sum_{n=1}^{N_t} E \left[ (|z_n(k)| - R)^2 \right]$ , l'algorithme Normalized-CMA [Jon95] et l'algorithme proposé par Zarzoso [ZC08b] utilisent un pas d'adaptation variant dans le temps, quant à l'algorithme en blocs itératif Least-Square CMA [GL86], il formule le problème de module constant comme un problème des moindres carrés :

$$J_{LS-CMA} = \|\mathbf{W}^H \underline{\mathbf{y}} - S\|^2, \quad S \in \mathcal{CM}$$

où  $\mathcal{CM}$  représente l'ensemble des signaux à module constant :

$$\mathcal{CM} = \{S \mid |s_n(k)| = 1, \forall n, k\}$$

L'algorithme G-CMA, proposé par Ikhlef [Ikh08], utilise les rotations de Givens complexes pour minimiser le critère CMA.

---

<sup>(9)</sup> Analytical-CMA

### 2.5.3 La fonction de contraste MultiModulus

L'algorithme MMA<sup>(10)</sup>, proposé dans [LL98] pour des signaux SISO puis dans [SWC02] pour un contexte MIMO, est composé de deux fonctions de coût, l'une pour la partie réelle et l'autre pour la partie imaginaire de la sortie de l'égaliseur  $\mathbf{z}(k)$  :

$$J_{MMA} = \sum_{m=1}^{N_t} \left( E \left[ \left( \Re(\mathbf{z}_m(k))^2 - R_r \right)^2 \right] + E \left[ \left( \Im(\mathbf{z}_m(k))^2 - R_i \right)^2 \right] \right)$$

où  $R_r = R_i = R = \frac{E[|\Re(s(k))|^4]}{E[|\Re(s(k))|^2]}$ . Les erreurs d'estimation pour les parties réelles et imaginaires sont faites indépendamment, ainsi la fonction de coût MM utilise implicitement la phase de la sortie de l'égaliseur. La poursuite d'un résidu de phase porteuse peut ainsi être effectuée conjointement à la séparation aveugle de sources lorsqu'une constellation de type QAM est utilisée. En sortie du séparateur, les symboles sources sont retrouvés à une rotation modulo  $\pi/2$  près.

La fonction de coût CM utilise uniquement le module de la sortie de l'égaliseur, ainsi les algorithmes utilisant la fonction de coût CM estiment les sources à une rotation arbitraire près. Ils doivent donc utiliser en sortie une poursuite de phase pour supprimer le résidu de phase porteuse.

Sansrimahachai a proposé dans [SWC02] d'associer à la fonction de coût MM la contrainte d'orthogonalité utilisée pour retrouver des sources indépendantes en sortie de la BSS. Ainsi les signaux reçus  $\mathbf{y}(k)$  sont préalablement blanchis et le critère MM devient :

$$\begin{cases} \min J_{MMA}(\mathbf{W}) \\ \text{sous } \mathbf{W}^H \mathbf{W} = \mathbf{I}_{N_t} \end{cases}$$

La minimisation du critère est obtenue pour la méthode du gradient stochastique à pas fixe par la mise à jour de la matrice de séparation  $\tilde{\mathbf{W}}(k)$  suivante :

$$\tilde{\mathbf{W}}_n(k) = \tilde{\mathbf{W}}_n(k-1) - \mu e_n(k) \underline{\mathbf{y}}(k), \quad n \in \{1, \dots, N_t\}$$

avec  $e_n(k) = \left( \Re(\mathbf{z}_n(k))^2 - R \right) \Re(\mathbf{z}_n(k)) - j \left( \Im(\mathbf{z}_n(k))^2 - R \right) \Im(\mathbf{z}_n(k))$ , la contrainte est vérifiée à chaque itération en utilisant une orthogonalisation de Gram-Schmidt sur la matrice  $\tilde{\mathbf{W}}(k)$ . La minimisation du critère peut très bien être obtenue par un gradient stochastique à pas variable ou une RLS. Nous verrons dans le chapitre 4 comment minimiser le critère MM à l'aide de méthodes analytiques (c.f. paragraphes 2.5.2.4 et 2.5.2.5).

### 2.5.4 La fonction de contraste à norme constante

Les deux fonctions de coût que nous venons de voir sont toutes les deux dépendantes d'un certain type de constellation, ainsi le critère CM est plus adapté aux constellations circulaires comme les PSK et le critère MM est plus adapté aux constellations carrées de type QAM. Goupil et Palicot ont donc proposé une nouvelle classe d'algorithmes à norme constante pour des signaux SISO [GP02, GP07], Ikhlef les a ensuite adapté aux signaux

---

<sup>(10)</sup>MultiModulus Algorithm

MIMO [Ikh08].

Le critère CN<sup>(11)</sup> utilise l'ensemble des fonctions normes notées  $\mathcal{N}(\cdot)$  qui satisfont les conditions suivantes :

- $\forall a \in \mathbb{C}, \mathcal{N}(a) \geq 0$
- $\forall a \in \mathbb{C}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \mathcal{N}(\alpha a) = |\alpha| \mathcal{N}(a)$
- $\forall a, b \in \mathbb{C}^2, \mathcal{N}(a + b) \leq \mathcal{N}(a) + \mathcal{N}(b)$

Ainsi, différentes normes peuvent être utilisées pour construire le critère CN. De manière générale le critère s'écrit :

$$\begin{cases} \min J_{CNA}(\mathbf{W}) = \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{N_t} E \left[ (\mathcal{N}(z_m(k))^2 - R)^2 \right] \\ \text{sous } \mathbf{W}^H \mathbf{W} = \mathbf{I}_{N_t} \end{cases}$$

où  $R = \frac{E[\mathcal{N}(s)^4]}{E[\mathcal{N}(s)^2]}$ .

On peut remarquer que l'algorithme CNA-2, qui utilise la norme 2, est identique à l'algorithme CMA.

#### 2.5.4.1 L'algorithme CNA- $l$

L'algorithme CNA- $l$  utilise, pour minimiser le critère  $J_{CNA}$ , une norme  $l$  définie par :

$$\|z\|_l = \sqrt[l]{\Re(z)^l + \Im(z)^l}$$

Ces normes présentent chacune une boule de rayon  $R$  plus ou moins étalée suivant la valeur de  $l$ . Le critère associé à chacune de ces normes devient :

$$\begin{cases} \min J_{CNA}(\mathbf{W}) = \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{N_t} E \left[ \left( \|z_m(k)\|_l^2 - R \right)^2 \right] \\ \text{sous } \mathbf{W}^H \mathbf{W} = \mathbf{I}_{N_t} \end{cases}$$

En utilisant le gradient stochastique à pas fixe pour minimiser le critère CN- $l$ , la mise à jour de la matrice de séparation  $\mathbf{W}(k)$  est réalisée par :

$$\tilde{\mathbf{W}}_n(k) = \tilde{\mathbf{W}}_n(k-1) - \mu e_n(k) \underline{\mathbf{y}}(k), \quad n \in \{1, \dots, N_t\}$$

avec  $e_n(k) = \left( \|z_n(k)\|_l^2 - R \right) \frac{\text{sign}(\Re(z_n(k)))^l \Re(z_n(k))^{l-1} - j \text{sign}(\Im(z_n(k)))^l \Im(z_n(k))^{l-1}}{\|z_n(k)\|_l^{l-2}}$ . La contrainte est ensuite satisfaite à chaque itération en utilisant un algorithme d'orthogonalisation. La minimisation du critère CN peut aussi être obtenue à l'aide d'un gradient stochastique à pas adaptatif ou d'un RLS.

#### 2.5.4.2 L'algorithme CQA

L'algorithme CQA<sup>(12)</sup> est quant à lui plus adapté aux constellations QAM puisqu'il utilise la norme infinie :

$$\|z\|_\infty = \max(\Re(z), \Im(z))$$

---

<sup>(11)</sup>Constant Norm

<sup>(12)</sup>Constant Square Algorithm

La fonction de coût CQ devient :

$$\begin{cases} \min J_{CQA}(\mathbf{W}) = \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{N_t} E \left[ \left( \|z_m(k)\|_\infty^2 - R \right)^2 \right] \\ \text{sous } \mathbf{W}^H \mathbf{W} = \mathbf{I}_{N_t} \end{cases}$$

avec  $R = \frac{E[\|s\|_\infty^4]}{E[\|s\|_\infty^2]}$  La mise à jour de la matrice  $\tilde{\mathbf{W}}(k)$  en utilisant un gradient stochastique à pas fixe se fait de la même manière qu'avec l'algorithme CNA- $l$  :

$$\tilde{\mathbf{W}}_n(k) = \tilde{\mathbf{W}}_n(k-1) - \mu e_n(k) \underline{\mathbf{y}}(k), \quad n \in \{1, \dots, N_t\}$$

avec

$$e_n(k) = \left( \|z_m(k)\|_\infty^2 - R \right) f(z_m(k))$$

où

$$f(z_m(k)) \begin{cases} \Re(z_n(k)), & \text{si } |\Re(z_n(k))| \geq |\Im(z_n(k))| \\ j\Im(z_n(k)), & \text{sinon} \end{cases}$$

La contrainte est ensuite satisfaite à l'aide d'un algorithme d'orthogonalisation. Une version simplifiée de l'algorithme CQA, ainsi que l'étude de sa convergence ont été proposées par Ikhlef dans [Ikh08]. La minimisation du critère CQ peut aussi être réalisée en utilisant un gradient stochastique à pas variable ou un RLS.

#### 2.5.4.3 L'algorithme "Simplified CQA" ou "Simplified CMA"

Le critère appelé Simplified CQA dans [Ikh08] ou encore Simplified CMA dans [IG07] et proposé par Ikhlef est une version simplifiée des critères CQA, CMA et MMA. En effet, en employant une seule dimension, i.e. soit la partie réelle soit la partie imaginaire, ce critère conduit à une réduction de la complexité de calcul. Nous cherchons donc à minimiser :

$$\begin{cases} J_{SCMA}(\mathbf{W}) = \sum_{m=1}^{N_t} E \left[ \left( \Re(\mathbf{z}_m(k))^2 - R_r \right)^2 \right] \\ \text{sous } \mathbf{W}^H \mathbf{W} = \mathbf{I}_{N_t} \end{cases}$$

Une étude de convergence du critère a été proposée dans [IG07]. La fonction de coût SCMA est ensuite implémentée à l'aide de l'algorithme du gradient stochastique à pas fixe, ce qui conduit à l'équation de mise à jour :

$$\tilde{\mathbf{W}}_n(k) = \tilde{\mathbf{W}}_n(k-1) - \mu e_n(k) \underline{\mathbf{y}}(k), \quad n \in \{1, \dots, N_t\}$$

avec

$$e_n(k) = \left( \Re(\mathbf{z}_m(k))^2 - R_r \right) \Re(\mathbf{z}_m(k))$$

Un algorithme d'orthogonalisation permet d'obtenir la matrice  $\mathbf{W}(k)$  satisfaisant la contrainte à chaque itération. La minimisation de ce critère peut être aussi obtenue à l'aide d'un gradient stochastique à pas fixe ou d'un RLS et nous verrons dans le chapitre 4 comment implémenter ce critère en utilisant des outils analytiques.

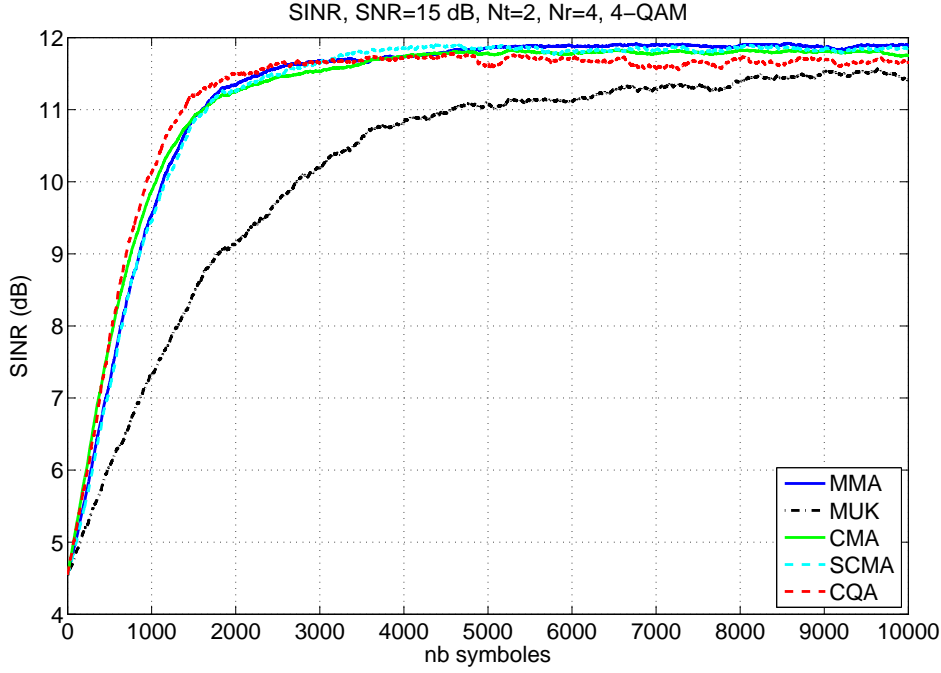


FIG. 2.3 – SINR, en fonction du temps, des différents algorithmes de BSS

## 2.6 Simulations

Les performances des algorithmes MMA, MUK, CMA, CQA, SCMA précédemment décrits sont comparés ici en termes de SINR<sup>(13)</sup> et TEB. Dans les simulations tous les algorithmes utilisent un algorithme du gradient stochastique pour implémenter les critères. Les signaux sources sont issus d'une constellation 4-QAM et sont transmis sur un canal de mélange plat en temps et en fréquence. Le pas d'adaptation utilisé pour les algorithmes est  $\mu = 0.002$ . Nous considérerons un système MIMO utilisant 2 antennes émettrices et 4 réceptrices. L'expression du SINR est donnée par :

$$SINR_n = \frac{|g_{nn}|^2}{\sum_{m, m \neq n} |g_{mn}|^2 + \mathbf{W}_n^H \mathbf{R}_b \mathbf{W}_n}$$

avec  $SINR_n$  le SINR du signal source présent sur la  $n^e$  sortie,  $\mathbf{G} = \mathbf{W}^H \mathbf{H}$  et  $g_{mn} = \mathbf{W}_m^H \mathbf{H}_n$  et  $\mathbf{R}_b = E[\mathbf{b}\mathbf{b}^H]$  est la matrice de corrélation du bruit. Lors des simulations, on tracera le SINR moyen :

$$SINR = \frac{1}{N_t} \sum_{n=1}^{N_t} SINR_n$$

La figure 2.3 représente le SINR en fonction du temps des différents algorithmes de BSS pour un RSB de 15dB. Nous remarquons que la vitesse de convergence et le SINR obtenu en régime stationnaire des algorithmes MMA, CMA, CQA et SCMA sont sensiblement les

<sup>(13)</sup>Signal Interference Noise Ratio

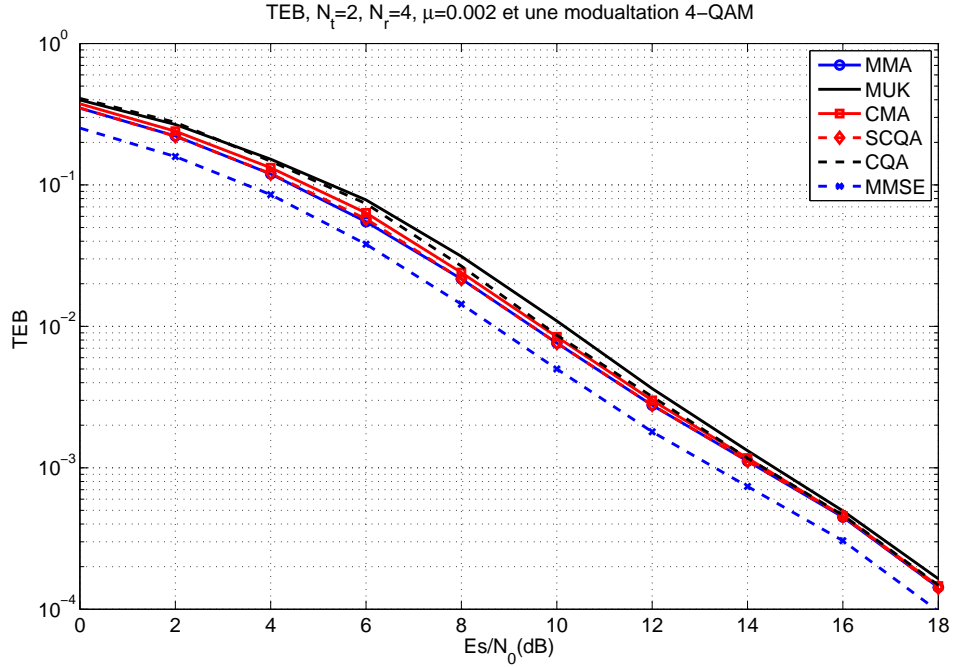


FIG. 2.4 – TEB en fonction du RSB des différents algorithmes de BSS

mêmes. Seul l'algorithme MUK possède une convergence plus lente pour atteindre un SINR en régime stationnaire plus faible que les autres algorithmes. Les algorithmes MMA, CMA, CQA et SCMA possèdent donc les mêmes performances pour une constellation 4-QAM. Finalement, nous pouvons noter que ces algorithmes sont relativement lents puisqu'il leur faut au moins 2000 échantillons pour atteindre leur régime stationnaire.

La figure 2.4 compare les TEB des différents algorithmes de BSS en fonction du RSB. Pour calculer les TEB nous avons utilisé  $10^6$  symboles. Sur ces  $10^6$  symboles, un nouveau canal, indépendant du précédent, est généré tous les  $10^4$  symboles. Les symboles considérés pour tracer les TEB sont obtenus après convergence des différents algorithmes. Nous pouvons noter que tous les TEB sont sensiblement égaux. Nous avons aussi comparé les algorithmes aveugles avec l'égaliseur MMSE utilisant une connaissance parfaite du canal de transmission. Une différence de 1 dB en terme de SNR est observée entre les algorithmes aveugle et l'égaliseur MMSE utilisé de manière non-aveugle lorsque le TEB est fixé à  $10^{-2}$ .

La figure 2.5 représente les constellations en sortie des algorithmes CMA, MMA et SCMA à 30dB lorsqu'un résidu de fréquence porteuse  $\delta_f T_s = 10^{-4}$  est présent sur les signaux à séparer. Nous pouvons noter que seuls les algorithmes MMA et SCMA permettent d'éliminer ce résidu de phase et d'estimer les symboles à une phase  $k\pi/2$  près au lieu d'une phase quelconque pour les autres fonctions de coût. Cette particularité les rend donc plus attrayants.

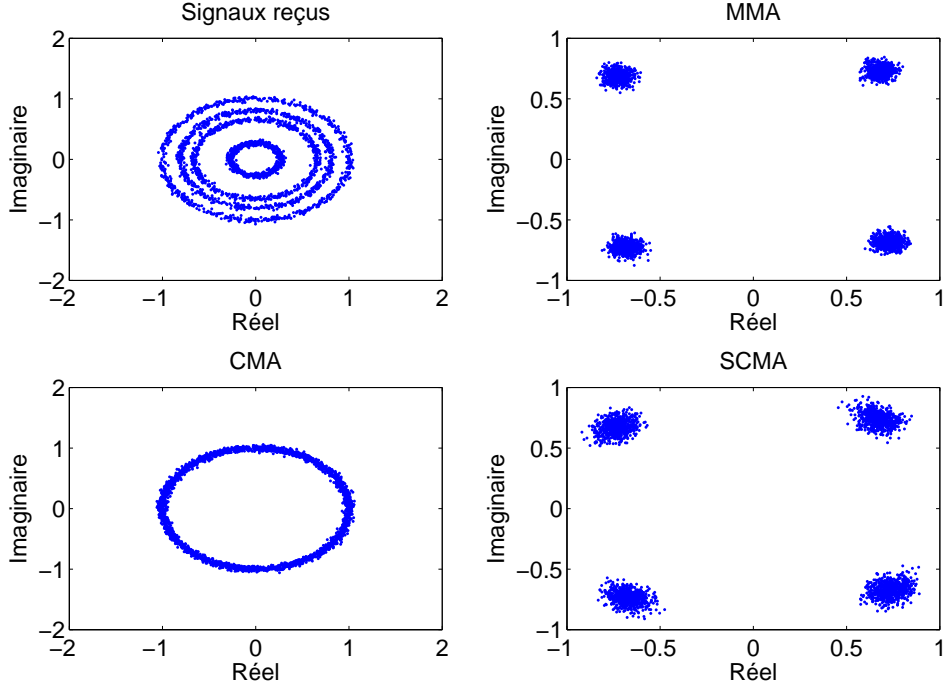


FIG. 2.5 – Constellations obtenues en sortie des algorithmes CMA, MMA et SCMA à 30 dB avec  $N_t = 2$ ,  $N_r = 4$  et une constellation 4-QAM et  $\delta_f T_s = 10^{-4}$

## 2.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté le principe de la séparation aveugle de sources. Puis les différentes fonctions de coût et méthodes d'implémentation conduisant aux algorithmes de BSS.

Nous avons vu que l'une des limites de la BSS est l'indétermination de phase et d'ordre sur les sources estimées. Nous essaierons de résoudre cette limite de la BSS dans le chapitre suivant. Les fonctions de coût MM et SCM permettent de réduire cette indétermination en estimant les sources issues d'une constellation QAM à une phase  $k\pi/2$  près au lieu d'une phase quelconque pour les autres critères. Mais en utilisant la redondance introduite par les codes MIMO, nous pouvons éliminer d'autres indéterminations. Ainsi, nous proposerons dans le chapitre suivant des fonctions de coût permettant de diminuer le nombre d'inconnues introduites par la BSS.

D'après les simulations nous pouvons retenir que les algorithmes à gradient stochastique sont relativement lents à converger et donc utilisables uniquement sur des canaux variant très peu dans le temps.

Nous avons abordé dans ce chapitre les méthodes analytiques ACMA par blocs et adaptatifs qui minimisent la fonction de coût CM. Ce type de méthode converge rapidement dans le temps, les rendant ainsi utilisables sur des canaux sélectifs temporellement. Cependant, l'implémentation analytique n'a été réalisée que pour les critères CM, or nous

---

avons constaté que les critères MM et SCM permettent de poursuivre un résidu de phase. Nous verrons donc dans le chapitre 4 comment implémenter les fonctions de coût MM et SCM à l'aide d'outils analytiques permettant ainsi la résolution de notre problématique sur des canaux sélectifs en temps. Les chapitres 5 et 6 présenteront une nouvelle approche pour estimer les sources lorsque que le canal est respectivement instantané et convolutif. La méthode proposée utilise la séparation aveugle de source pour initialiser un filtre de Kalman. Ce dernier permet de poursuivre les variations rapides d'un canal.





## Chapitre 3

# Exploitation de la redondance introduite par les codes STBC pour la séparation

Le chapitre 2 a permis de faire ressortir un inconvénient lié à la séparation aveugle de sources : l'ambiguïté sur la phase et l'ordre des sources estimées. D'autre part, nous avons présenté au chapitre 1 quelques codes MIMO STBC : Alamouti, Tarokh, code d'Or, qui transmettent les sources avec une certaine redondance afin d'augmenter la fiabilité de la transmission.

Comme il subsiste une rotation de phase différente et une permutation possible entre les lignes de la matrice de séparation, cette redondance n'est plus exploitable pour diminuer le taux d'erreurs symboles.

Afin de limiter cet inconvénient dans le cas des codes STBC, nous proposons dans ce chapitre des critères associés aux codes d'Alamouti, de Tarokh et d'Or. Ces critères permettent de retrouver les sources en sortie de la BSS avec la même phase sur chaque antenne, voire sans permutation suivant le code STBC utilisé.

Tout d'abord, nous rappellerons la structure de ces codes. Puis, nous présenterons une première approche, qui suppose l'ambiguïté de phase connue, appliquée en sortie de la BSS pour lever l'indétermination sur l'ordre des sources. Ces méthodes utilisent la redondance introduite par les codes d'Alamouti et de Tarokh. Puis nous présenterons une seconde approche basée sur des critères ayant pour but de lever une partie des ambiguïtés sur la phase et l'ordre. Une étude des points stationnaires de chacun de ces critères sera ensuite réalisée afin de démontrer que seuls les points désirés les minimisent. Nous implémenterons enfin ces critères associés à une fonction de coût de BSS à l'aide d'un gradient stochastique. Nous utiliserons le pas adaptatif décrit dans le chapitre 1 pour accroître les performances de certains algorithmes. Finalement, nous présenterons les résultats de simulation de nos critères.

### 3.1 Principe

Après la séparation aveugle de sources, les symboles transmis sont retrouvés à une certaine permutation et rotation près. Ainsi, les signaux en sortie de la BSS peuvent s'exprimer

sous la forme :

$$\mathbf{z}(k) = \Phi \mathbf{P} \mathbf{x}(k)$$

avec  $\Phi = \begin{pmatrix} e^{j\phi_1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & e^{j\phi_{N_t}} \end{pmatrix}$  la matrice diagonale représentant l'ambiguïté sur la phase,  $\mathbf{P}$  la matrice modélisant les permutations sur les lignes de  $\mathbf{x}(k)$  et  $\mathbf{x}(k)$  les symboles transmis résultant d'un codage d'Alamouti, de Tarokh ou d'Or.

On suppose que les symboles transmis non codés  $s(k)$  sont complexes, i.i.d., de moyenne nulle et de variance unitaire. La constellation utilisée est circulaire, c'est à dire  $E[s^2(k)] = 0$ . On rappelle que les vecteurs en sortie de l'égaliseur s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(k) &= \mathbf{W}^H \mathbf{y}(k) \\ &= \mathbf{W}^H \tilde{\mathbf{H}} \mathbf{x}(k) + \mathbf{b}'(k) \\ &= \mathbf{G}^H \mathbf{x}(k) + \mathbf{b}'(k) \end{aligned}$$

Où  $\mathbf{G} = \tilde{\mathbf{H}}^H \mathbf{W}$  et  $\tilde{\mathbf{H}}$  est la matrice de canal unitaire résultant d'un blanchiment des données reçues :  $\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{B} \mathbf{H}$  de dimension  $N_t \times N_t$ .

Avant de présenter les critères qui exploitent la redondance des codes d'Alamouti, de Tarokh et d'Or afin de lever certaines ambiguïtés sur la phase et/ou l'ordre des symboles estimés par la BSS, nous présenterons les premières méthodes que nous avons proposées dans [DG07a, DG07b] et qui supposent l'ambiguïté de la phase parfaitement levée.

## 3.2 Une première approche : recherche de $\mathbf{P}$ avec $\Phi$ connue

Dans une première approche, nous nous sommes focalisés sur l'indétermination sur l'ordre, supposant ainsi l'ambiguïté sur la phase parfaitement levée. Nous avons donc proposé des méthodes appliquées en sortie de la BSS pour retrouver l'ordre des sources en utilisant la redondance introduite par les codes d'Alamouti et de Tarokh.

### 3.2.1 Méthode associée au code d'Alamouti

Nous rappelons dans un premier temps la structure du code d'Alamouti [Ala98] :

$$\mathcal{H}_2 = \begin{pmatrix} s(2k) & -s^*(2k+1) \\ s(2k+1) & s^*(2k) \end{pmatrix}$$

Ce type de code utilise toujours deux antennes à l'émission, ainsi  $N_t = 2$  dans tous les paragraphes portant sur le code d'Alamouti.

En supposant la synchronisation avec le début du code d'Alamouti parfaite et l'ambiguïté de phase levée, nous obtenons les symboles estimés  $\mathbf{z}(k)$  à une permutation près sur les

lignes, ainsi :

$$\mathbf{Z}(k) = \begin{pmatrix} \hat{s}(2k) & -\hat{s}^*(2k+1) \\ \hat{s}(2k+1) & \hat{s}^*(2k) \end{pmatrix}$$

si il n'y a pas de permutations sur les lignes

ou

$$\mathbf{Z}(k) = \begin{pmatrix} \hat{s}(2k+1) & \hat{s}^*(2k) \\ \hat{s}(2k) & -\hat{s}^*(2k+1) \end{pmatrix}$$

si il y a une permutation des lignes

Nous pouvons noter dès à présent que lorsqu'il n'y a pas de permutation, le produit de la première diagonale, i.e.  $z_1(2k)z_2(2k+1)$ , est positif alors que le produit de la seconde diagonale, i.e.  $z_2(2k)z_1(2k+1)$ , est négatif et nous observons l'inverse lorsqu'il y a une permutation. C'est cette particularité que nous allons utiliser pour lever l'indétermination sur l'ordre des lignes. Nous définissons ainsi deux indicateurs :

$$\begin{cases} I_1(k) = \Re(z_1(2k)z_2(2k+1)) \\ I_2(k) = \Re(z_2(2k)z_1(2k+1)) \end{cases}$$

Si il n'y a pas de permutation alors  $I_1(k) = |\hat{s}(2k)|^2 > 0$  et  $I_2(k) = -|\hat{s}(2k+1)|^2 < 0$  sinon on observe l'inverse. De cette constatation, nous proposons l'algorithme suivant :

**Si**  $I_1(k) > I_2(k)$  alors il n'y a pas de permutation sur les lignes **sinon** l'algorithme de BSS a introduit une permutation sur les lignes et la matrice  $\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  est appliquée à  $\mathbf{Z}$ .

Cependant, en supposant que le canal ne varie pas au cours du temps et donc que les symboles subissent la même permutation, nous pouvons rendre plus robuste cet algorithme en sommant les indicateurs  $I_1(k)$  et  $I_2(k)$  sur  $2N_p$  symboles estimés, on obtient alors :

**Si**  $\sum_{k=1}^{N_p} I_1(k) > \sum_{k=1}^{N_p} I_2(k)$  alors il n'y a pas de permutation sur les lignes **sinon** l'algorithme de BSS a introduit une permutation sur les lignes et la matrice  $\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  est appliquée à  $\mathbf{Z}$ .

Pour finir, la redondance introduite par Alamouti est exploitée puis supprimée et permet de réduire l'EQM des symboles estimés en effectuant une moyenne :

- **Si**  $z_1(2k) = \hat{s}(2k)$  **alors**  $\hat{s}(2k) = \frac{z_1(2k) + z_2^*(2k+1)}{2}$  et  $\hat{s}(2k+1) = \frac{z_2(2k) - z_1^*(2k+1)}{2}$
- **Si**  $z_1(2k) = \hat{s}(2k+1)$  **alors**  $\hat{s}(2k+1) = \frac{z_1(2k) - z_2^*(2k+1)}{2}$  et  $\hat{s}(2k) = \frac{z_2(2k) + z_1^*(2k+1)}{2}$

Ainsi, la variance des symboles est réduite par deux :

$$\text{Var}[\hat{s}(k)] = \frac{2\text{Var}[z_i(k)]}{4} = \frac{\text{Var}[z_i(k)]}{2}$$

puisque les  $z_i(k)$  sont mutuellement indépendants à l'instant  $k$ , possèdent la même variance et ont une moyenne nulle.

L'Annexe A présente la démonstration théorique que l'EQM, en utilisant ce moyennage, est réduite de 3 dB par rapport au cas où la redondance n'est pas exploitée.

### 3.2.2 Méthode associée au code de Tarokh $\mathcal{G}_3$

Avec les codes de Tarokh nous appliquons une autre méthode, ainsi au lieu de détecter si il y a une permutation des lignes ou pas, nous estimons directement les symboles transmis dans le bon ordre. Cette méthode a l'avantage d'être plus simple et plus efficace. Avant de présenter cette méthode nous rappelons la structure du code de Tarokh  $\mathcal{G}_3$  :

$$\mathcal{G}_3 = \begin{pmatrix} s(4k) & -s(4k+1) & -s(4k+2) & -s(4k+3) & s^*(4k) & -s^*(4k+1) & -s^*(4k+2) & -s^*(4k+3) \\ s(4k+1) & s(4k) & s(4k+3) & -s(4k+2) & s^*(4k+1) & s^*(4k) & s^*(4k+3) & -s^*(4k+2) \\ s(4k+2) & -s(4k+3) & s(4k) & s(4k+1) & s^*(4k+2) & -s^*(4k+3) & s^*(4k) & s^*(4k+1) \end{pmatrix}$$

Ce code utilise 3 antennes émettrices, ainsi  $N_t = 3$ . En supposant que le début de la trame est bien synchronisé avec le début du code de Tarokh, et après réception, séparation et levée d'ambiguïté sur la phase, on obtient le bloc à l'instant  $k$  défini par :

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(k) &= \mathbf{P} \begin{pmatrix} \hat{s}(4k) & -\hat{s}(4k+1) & -\hat{s}(4k+2) & -\hat{s}(4k+3) & \hat{s}^*(4k) & -\hat{s}^*(4k+1) & -\hat{s}^*(4k+2) & -\hat{s}^*(4k+3) \\ \hat{s}(4k+1) & \hat{s}(4k) & \hat{s}(4k+3) & -\hat{s}(4k+2) & \hat{s}^*(4k+1) & \hat{s}^*(4k) & \hat{s}^*(4k+3) & -\hat{s}^*(4k+2) \\ \hat{s}(4k+2) & -\hat{s}(4k+3) & \hat{s}(4k) & \hat{s}(4k+1) & \hat{s}^*(4k+2) & -\hat{s}^*(4k+3) & \hat{s}^*(4k) & \hat{s}^*(4k+1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z_1(8k) & z_1(8k+1) & z_1(8k+2) & z_1(8k+3) & z_1(8k+4) & z_1(8k+5) & z_1(8k+6) & z_1(8k+7) \\ z_2(8k) & z_2(8k+1) & z_2(8k+2) & z_2(8k+3) & z_2(8k+4) & z_2(8k+5) & z_2(8k+6) & z_2(8k+7) \\ z_3(8k) & z_3(8k+1) & z_3(8k+2) & z_3(8k+3) & z_3^*(8k+4) & z_3^*(8k+5) & z_3^*(8k+6) & z_3^*(8k+7) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On peut noter que les transformations faites sur les symboles  $s(k)$  sont linéaires, mise à part le conjugué. Afin de les rendre toutes linéaires, nous conjuguons les symboles  $z_l(8k+4)$ ,  $z_l(8k+5)$ ,  $z_l(8k+6)$ ,  $z_l(8k+7)$ , avec  $l \in \{1, \dots, N_t\}$ , conduisant à :

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}'(k) &= [\mathbf{z}'_l](k) \\ &= \begin{pmatrix} z_1(8k) & z_1(8k+1) & z_1(8k+2) & z_1(8k+3) & z_1^*(8k+4) & z_1^*(8k+5) & z_1^*(8k+6) & z_1^*(8k+7) \\ z_2(8k) & z_2(8k+1) & z_2(8k+2) & z_2(8k+3) & z_2^*(8k+4) & z_2^*(8k+5) & z_2^*(8k+6) & z_2^*(8k+7) \\ z_3(8k) & z_3(8k+1) & z_3(8k+2) & z_3(8k+3) & z_3^*(8k+4) & z_3^*(8k+5) & z_3^*(8k+6) & z_3^*(8k+7) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour retrouver les symboles transmis  $s(k)$ , nous effectuons une combinaison linéaire des signaux :

$$\begin{aligned} \hat{s}(4k) &= \left( \sum_{j \in \{0,1,2,3,4,5,6\}} \sum_{i=1}^{N_t} z'_i(8k+j) \right) / 6 \\ \hat{s}(4k+1) &= \left( \sum_{j \in \{0,3,4,7\}} \sum_{i=1}^{N_t} z'_i(8k+j) - \sum_{j \in \{1,5\}} \sum_{i=1}^{N_t} z'_i(8k-j) \right) / 6 \\ \hat{s}(4k+2) &= \left( \sum_{j \in \{0,4\}} \sum_{i=1}^{N_t} z'_i(8k+j) - \sum_{j \in \{2,3,6,7\}} \sum_{i=1}^{N_t} z'_i(8k+j) \right) / 6 \\ \hat{s}(4k+3) &= \left( \sum_{j \in \{2,6\}} \sum_{i=1}^{N_t} z'_i(8k+j) - \sum_{j \in \{1,3,5,7\}} \sum_{i=1}^{N_t} z'_i(8k+j) \right) / 6 \end{aligned}$$

Comme le code d'Alamouti, la variance des symboles ainsi estimés est réduite de moitié :

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{s}(k)] &= \frac{\sum_{j=1}^6 \sum_{i=1}^{N_t} \text{Var}[z'_i(k)]}{36} \\ &= \frac{18 \text{Var}[z'_i(k)]}{36} = \frac{\text{Var}[z'_i(k)]}{2} \end{aligned}$$

La même méthode peut être utilisée sur un code de Tarokh  $\mathcal{G}_4$  utilisant 4 antennes émettrices.

### 3.3 Une seconde approche : proposition de critères avec $\Phi$ et $P$ inconnus

Cette première approche que nous venons de présenter fait intervenir une hypothèse assez forte, i.e. la levée d'ambiguïté parfaite de la phase. Nous avons donc proposé par la suite des critères associés aux codes d'Alamouti, de Tarokh et d'Or pour lever une partie de l'ambiguïté sur la phase et sur l'ordre. En effet, nous pouvons noter que la BSS introduit une phase différente sur chacune des sorties, rendant ainsi impossible l'exploitation de la redondance pour réduire l'EQM et le TES. Ces critères ainsi que l'étude théorique de leurs points stationnaires sont exposés dans les paragraphes qui suivent.

#### 3.3.1 Critère associé au code d'Alamouti

En gardant à l'esprit la structure de code d'Alamouti présenté au paragraphe 3.2.1 et le fait que la séparation aveugle de sources introduit une phase arbitraire sur chacune des lignes, ainsi qu'une éventuelle permutation entre les lignes, nous obtenons en sortie de la BSS deux schémas possibles :

Lorsqu'il n'y a pas de permutation des lignes :

$$\mathbf{Z}(k) = \begin{pmatrix} s(2k)e^{j\Phi_1} & -s^*(2k+1)e^{j\Phi_1} \\ s(2k+1)e^{j\Phi_2} & s^*(2k)e^{j\Phi_2} \end{pmatrix}$$

avec  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  arbitraires. Et lorsqu'il y a permutation des lignes :

$$\mathbf{Z}(k) = \begin{pmatrix} \hat{s}(2k+1)e^{j\Phi_1} & \hat{s}^*(2k)e^{j\Phi_1} \\ \hat{s}(2k)e^{j\Phi_2} & -\hat{s}^*(2k+1)e^{j\Phi_2} \end{pmatrix}$$

Nous proposons de minimiser le critère suivant, associé à un critère de séparation :

$$J_{alamouti} = \frac{1}{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} |z_1(2k) - z_2^*(2k+1)|^2$$

avec  $N_s$  un nombre fixé de symboles reçus.

Lorsque la BSS n'introduit pas de permutation sur les lignes, le critère vaut :  $J_{alamouti} = |e^{j\Phi_1} - e^{-j\Phi_2}|^2 \sigma_s^2$ , avec  $\sigma_s^2 \simeq \frac{1}{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} |s(k)|^2$ , où les symboles  $s(k)$  sont i.i.d, ce critère est minimal lorsque  $\Phi_1 = -\Phi_2$ .

Lorsqu'une permutation des lignes est introduite par la BSS, le critère devient :  $J_{alamouti} = |e^{j\Phi_1} + e^{-j\Phi_2}|^2 \sigma_s^2$  qui est minimisé lorsque  $\Phi_1 = -\Phi_2 \pm \pi$ .

En supposant que le début de trame est bien synchronisé avec le début du code d'Alamouti, ce critère nous permet donc de retrouver en sortie de la BSS une structure d'Alamouti. Le tableau 6.1 présente les différents résultats suivant qu'il y a permutation ou non des lignes. Il est important de retrouver une structure d'Alamouti en sortie de la BSS, en effet, si une phase différente est introduite sur chaque ligne, nous ne retrouvons plus sur

les deux diagonales les conjugués des symboles  $s(2k)$  et  $s(2k+1)$  et nous ne pouvons plus décoder ce code de manière à réduire le TEB et l'EQM. Nous démontrerons par la suite les minima de ce critère.

Permutation	Phases	Structure du code en sortie de la BSS
Non	$\Phi_1 = -\Phi_2$	$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} s(2k)e^{j\Phi_1} & -s^*(2k+1)e^{j\Phi_1} \\ s(2k+1)e^{-j\Phi_1} & s^*(2k)e^{-j\Phi_1} \end{pmatrix}$
Oui	$\Phi_1 = -\Phi_2 \pm \pi$	$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} s(2k+1)e^{j\Phi_1} & s^*(2k)e^{j\Phi_1} \\ -s(2k)e^{-j\Phi_1} & s^*(2k+1)e^{-j\Phi_1} \end{pmatrix}$

TAB. 3.1 – Tableau récapitulatif du critère associé au code d'Alamouti

Une fois les symboles sources estimés, il ne nous reste plus qu'à exploiter et à supprimer la redondance. Ainsi, les symboles transmis  $\mathbf{s}(k)$  sont estimés par moyennage :

$$\begin{cases} z'_1(k) = \frac{z_1(2k) + z_2^*(2k+1)}{2} \\ z'_2(k) = \frac{z_2(2k) - z_1^*(2k+1)}{2} \end{cases}$$

Ainsi, lorsqu'il n'y a pas de permutation sur les lignes, on obtient :

$$\mathbf{z}'(k) \simeq \begin{pmatrix} s(2k)e^{j\Phi_1} \\ s(2k+1)e^{-j\Phi_1} \end{pmatrix}$$

et lorsqu'il y a permutation

$$\mathbf{z}'(k) \simeq \begin{pmatrix} s(2k+1)e^{j\Phi_1} \\ -s(2k)e^{-j\Phi_1} \end{pmatrix}$$

Ainsi, en supposant  $\Phi_1$  connue (rien ne permet de la déterminer en aveugle), la variance des symboles est réduite par deux :

$$\text{Var}[z'_n(k)] = \frac{2\text{Var}[z_n(k)]}{4} = \frac{\text{Var}[z_n(k)]}{2}$$

### 3.3.2 Critère associé au code de Tarokh $\mathcal{G}_3$

En considérant la structure du code de Tarokh présenté au paragraphe 3.2.2, nous remarquons dès à présent que le symbole  $s(4k)$  occupe les diagonales de ce code. C'est cette redondance particulière au code de Tarokh  $\mathcal{G}_3$  que nous allons exploiter. En effet, lorsque la BSS introduit une permutation sur les lignes et/ou une rotation, nous ne retrouvons plus en sortie de la BSS cette particularité :

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} e^{j\Phi_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{j\Phi_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{j\Phi_3} \end{pmatrix} \mathbf{P}\mathbf{x}(k)$$

où  $\mathbf{P}$  représente la matrice de permutation et  $\mathbf{x}(k)$  les symboles transmis résultant du code de tarokh  $\mathcal{G}_3$ . Pour la suite, nous supposons que le début de la trame des signaux reçus est bien synchronisé avec le début du code de Tarokh.

Remarque : Les codes de Tarokh se déclinent en quatre codes  $\mathcal{G}_3$ ,  $\mathcal{G}_4$ ,  $\mathcal{H}_3$  et  $\mathcal{H}_4$ . Le critère que nous présentons ici est uniquement valable pour le code  $\mathcal{G}_3$ , pour les autres codes il est possible de proposer d'autres critères que nous n'aborderons pas dans ce document.

Afin d'éviter toute permutation sur les lignes en sortie de la BSS, nous proposons le critère :

$$J_{\mathcal{G}_3} = \frac{1}{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} |2z_1(4k) - z_2(4k+1) - z_3(4k+2)|^2$$

avec  $N_s$  un nombre fixé de symboles reçus.

Ainsi, ce critère n'est minimisé que si le symbole  $s(4k)e^{j\Phi_1}$  est sur la diagonale. Le tableau 3.2 présente le résultat que permet d'obtenir ce critère. Nous montrerons théoriquement que ce critère, associé à un critère de BSS, permet de retrouver les sources dans le bon ordre et avec la même phase.

Permutation	Phases	Structure du code en sortie de la BSS
Non	$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3$	$\mathbf{Z}(k) = \begin{pmatrix} e^{j\Phi_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{j\Phi_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{j\Phi_1} \end{pmatrix} \mathbf{x}(k)$

TAB. 3.2 – Tableau récapitulatif du critère associé au code de Tarokh

La redondance introduite par le code de Tarokh peut être exploitée dans un premier temps, pour estimer la phase  $\Phi_1$  modulo  $\pi$ , celle-ci est obtenue par l'opération suivante :

$$\Phi_1 + k\pi \simeq \frac{\text{Arg}(z_1(8k)z_1(8k+4))}{2}$$

Ensuite, la redondance est utilisée pour réduire l'EQM des symboles par moyennage puis elle est supprimée. Ainsi, les symboles transmis sont obtenus par :

$$\begin{cases} z'_1(k) = \frac{z_1(8k) + z_2(8k+1) + z_3(8k+2) + z_1^*(8k+4) + z_2^*(8k+5) + z_3^*(8k+6)}{6} \\ z'_2(k) = \frac{z_2(8k) - z_1(8k+1) + z_3(8k+3) + z_2^*(8k+4) - z_1^*(8k+5) + z_3^*(8k+7)}{6} \\ z'_3(k) = \frac{z_3(8k) - z_1(8k+2) - z_2(8k+3) + z_3^*(8k+4) - z_1^*(8k+6) - z_2^*(8k+7)}{6} \\ z'_4(k) = \frac{-z_3(8k+1) + z_2(8k+2) - z_1(8k+3) - z_3^*(8k+5) + z_2^*(8k+6) - z_1^*(8k+7)}{6} \end{cases}$$

c'est à dire

$$\mathbf{z}'(k) \simeq \begin{pmatrix} s(4k)e^{jk\pi} \\ s(4k+1)e^{jk\pi} \\ s(4k+2)e^{jk\pi} \\ s(4k+3)e^{jk\pi} \end{pmatrix}$$

En supposant l'indétermination de phase  $k\pi$  connue, la variance des symboles ainsi estimés est réduite d'un facteur 6 :

$$\text{Var}[z'_n(k)] = \frac{6\text{Var}[z_n(k)]}{36} = \frac{\text{Var}[z_n(k)]}{6}$$



### 3.3.3 Critère de séparation associé au critère $J_{Alamouti}$ et $J_{\mathcal{G}_3}$

Afin de retrouver les signaux sources,  $J_{Alamouti}$  et  $J_{\mathcal{G}_3}$  doivent être associés à un critère de séparation aveugle de sources (CMA, MUK, ...) que nous appellerons ici  $J_{BSS}$ . Ainsi, les critères à minimiser deviennent :

$$\begin{cases} J = J_{BSS} + J_{Alamouti} \\ \text{sous } \mathbf{G}^H \mathbf{G} = \mathbf{I}_{N_t} \end{cases}$$

pour le code d'Alamouti et

$$\begin{cases} J = J_{BSS} + J_{\mathcal{G}_3} \\ \text{sous } \mathbf{G}^H \mathbf{G} = \mathbf{I}_{N_t} \end{cases}$$

pour le code de Tarokh  $\mathcal{G}_3$ .

Nous rappelons que la contrainte est nécessaire pour obtenir des sources indépendantes en sortie de la BSS. La fonction de coût  $J_{BSS}$  utilisée dans ce chapitre est le "Constant Modulus" (CM) [GL86, LT83, RS00, ZTJ99, TF99, PP97] décrit dans le chapitre 2. Les études des points stationnaires seront effectuées sur les critères  $J$  associés à la contrainte  $\mathbf{G}^H \mathbf{G} = \mathbf{I}_{N_t}$ . Ces études sont faites dans le paragraphe 3.5 et dans l'annexe B pour le code d'Alamouti et de Tarokh respectivement.

### 3.3.4 Critère associé au code d'Or

Nous nous intéressons ici au code d'or [BRV05] utilisant deux antennes émettrices, i.e.  $N_t = 2$ . Le mot de code de celui-ci est :

$$\mathcal{O}_2 = \begin{pmatrix} x_1(k) & x_3(k) \\ x_2(k) & x_4(k) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \alpha(s(4k) + \theta s(4k+1)) & \alpha(s(4k+2) + \theta s(4k+3)) \\ j\bar{\alpha}(s(4k+2) + \bar{\theta} s(4k+3)) & \bar{\alpha}(s(4k) + \bar{\theta} s(4k+1)) \end{pmatrix}$$

avec  $\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  le nombre d'or,  $\bar{\theta} = 1 - \theta$ ,  $\alpha = 1 + i(1 - \theta)$ ,  $\bar{\alpha} = 1 + i(1 - \bar{\theta})$ . Le code d'or faisant partie des codes en blocs linéaires, les symboles codés  $x_n(k)$  peuvent s'exprimer sous forme vectorielle :

$$\mathbf{x}(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \alpha & \alpha\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j\bar{\alpha} & j\bar{\alpha}\bar{\theta} \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha\theta \\ \bar{\alpha} & \bar{\alpha}\bar{\theta} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s(4k) \\ s(4k+1) \\ s(4k+2) \\ s(4k+3) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{C}\mathbf{s}(k)$$

Pour retrouver les symboles non-codés  $\mathbf{s}(k)$ , il suffit d'appliquer la matrice code inverse  $\mathbf{C}^{-1} : \mathbf{s}(k) = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{x}(k)$ , avec

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} -\bar{\theta}/\alpha & 0 & 0 & \theta/\bar{\alpha} \\ 1/\alpha & 0 & 0 & -1/\bar{\alpha} \\ 0 & -j\theta/\bar{\alpha} & -\bar{\theta}/\alpha & 0 \\ 0 & j/\bar{\alpha} & 1/\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Cependant, les symboles codés sont retrouvés en sortie de la BSS avec une certaine ambiguïté de phase et d'ordre :

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{\Phi}\mathbf{P}\mathbf{x}'(k)$$

avec  $\mathbf{x}'(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) & x_3(k) \\ x_2(k) & x_4(k) \end{pmatrix}$  et  $\Phi = \begin{pmatrix} e^{j\Phi_1} & 0 \\ 0 & e^{j\Phi_2} \end{pmatrix}$ . Ces ambiguïtés ne nous permettent plus de retrouver les symboles non-codés puisque :

$$\mathbf{s}(k) = \mathbf{C}^{-1} \begin{pmatrix} \Phi \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi \mathbf{P} \end{pmatrix} \mathbf{C} \mathbf{s}(k) \Leftrightarrow \Phi \mathbf{P} = \mathbf{I}$$

Ainsi, au lieu d'estimer les symboles  $\mathbf{x}(k)$  on cherche une matrice de séparation  $\mathbf{W}$  à appliquer au signaux reçus  $\mathbf{y}(k)$  de manière à obtenir en sortie de la séparation aveugle de sources les symboles transmis non codés. Ainsi, nous proposons le critère CMA adapté au code d'or :

$$\begin{cases} J_{Or} = \sum_{n=1}^{N_t} E [|t_n(k)|^2 - R]^2 \\ \text{sous } \mathbf{G}^H \mathbf{G} = \mathbf{I}_{N_t} \end{cases}$$

avec l'estimée  $t_n$  des symboles transmis non codés et obtenus de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} t_1(k) \\ t_2(k) \\ t_3(k) \\ t_4(k) \end{pmatrix} = \mathbf{C}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(2k) \\ y_2(2k) \\ y_1(2k+1) \\ y_2(2k+1) \end{pmatrix}$$

C'est à dire

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(k) &= \mathbf{C}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{G}^H & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}^H \end{pmatrix} \mathbf{C} \mathbf{s}(k) \\ \mathbf{t}(k) &= \mathbf{G}'^H \mathbf{s}(k) \end{aligned}$$

avec  $\mathbf{G} = \tilde{\mathbf{H}}^H \mathbf{W}$  et  $\mathbf{G}'^H = \mathbf{C}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{G}^H & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}^H \end{pmatrix} \mathbf{C}$ .

Nous montrerons théoriquement dans l'annexe C que cette fonction de coût comporte deux minima :

Soit tous les symboles  $\mathbf{s}(k)$  sont retrouvés dans le bon ordre à une phase près identique, i.e.

$$\mathbf{G}' = \begin{pmatrix} e^{j\Phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{j\Phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{j\Phi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{j\Phi} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{G} = \begin{pmatrix} e^{j\Phi} & 0 \\ 0 & e^{j\Phi} \end{pmatrix}$$

Soit les symboles non codés sont retrouvés dans un ordre décroissant :

$$\mathbf{G}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e^{j\Phi} \\ 0 & 0 & -e^{j\Phi} & 0 \\ 0 & -je^{j\Phi} & 0 & 0 \\ je^{j\Phi} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & e^{j\Phi} \\ -je^{j\Phi} & 0 \end{pmatrix}$$

Le critère que nous avons proposé permet de retrouver les symboles non-codés dans l'ordre croissant ou décroissant à une phase près. Le tableau 3.3 présente les différents résultats que l'on peut obtenir à l'aide de ce critère.

Permutation	Phases	Symboles obtenus en sortie de la BSS
Non	$\Phi_1 = \Phi_2$	$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} s(4k)e^{j\Phi} & s(4k+1)e^{j\Phi} & s(4k+2)e^{j\Phi} & s(4k+3)e^{j\Phi} \end{pmatrix}$
Oui	$\Phi_1 = \Phi_2 - \pi/2$	$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} s(4k+3)e^{j\Phi} & -s(4k+2)e^{j\Phi} & -js(4k+1)e^{j\Phi} & js(4k)e^{j\Phi} \end{pmatrix}$

TAB. 3.3 – Tableau récapitulatif du critère associé au code d’Or

### 3.4 Conditions suffisantes et matrice Hessienne

Dans un premier temps, nous rappelons les conditions nécessaires et suffisantes du second ordre pour obtenir un minimum local, nous définissons la matrice Hessienne de  $J$  et nous présentons le système à résoudre pour obtenir les points stationnaires des critères. Nous rappelons que l’opérateur gradient complexe est défini dans le paragraphe 2.5.2.1

#### 3.4.1 Conditions suffisantes du premier et du second ordre

Le théorème énonçant les conditions suffisantes du premier et du second ordre pour obtenir un minimum local est :

**Théorème 3.4.1** *Soit  $\mathbf{W}^\diamond$ , tel que*

$$\nabla_{\mathbf{W}^\diamond} J = 0 \text{ et } \nabla_{\mathbf{W}^{*\diamond}} J = 0$$

*et*

$$\forall \mathbf{y} \in \mathbb{C}^{N_t}, \mathbf{y}^H \mathfrak{H}_{\mathbf{W}^\diamond} J \mathbf{y} \geq 0$$

*i.e.  $\mathfrak{H}_{\mathbf{W}^\diamond} J$  est semi-définie positive. Où  $\mathfrak{H}_{\mathbf{W}^\diamond} J$  est la matrice hessienne de la fonction de coût.*

*Alors  $\mathbf{W}^\diamond$  est un minimum local de  $J(\mathbf{W}^\diamond)$ .*

#### 3.4.2 Matrice Hessienne

La matrice Hessienne  $\mathfrak{H}_{\mathbf{W}} J$  complexe de dimension  $2N_t^2 \times 2N_t^2$  de la fonction de coût  $J(\mathbf{W})$  est donnée par :

$$\mathfrak{H}_{\mathbf{W}} J = \left( \begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{W}_{11} \partial \mathbf{W}_{11}^*} & \cdots & \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{W}_{11} \partial \mathbf{W}_{N_t N_t}^*} & \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{W}_{11}^* \partial \mathbf{W}_{11}} & \cdots & \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{W}_{11}^* \partial \mathbf{W}_{N_t N_t}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{W}_{N_t N_t} \partial \mathbf{W}_{11}^*} & \cdots & \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{W}_{N_t N_t} \partial \mathbf{W}_{N_t N_t}^*} & \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{W}_{N_t N_t}^* \partial \mathbf{W}_{11}} & \cdots & \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{W}_{N_t N_t}^* \partial \mathbf{W}_{N_t N_t}} \\ \hline \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{W}_{11} \partial \mathbf{W}_{11}} & \cdots & \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{W}_{11} \partial \mathbf{W}_{N_t N_t}} & \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{W}_{11}^* \partial \mathbf{W}_{11}} & \cdots & \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{W}_{11}^* \partial \mathbf{W}_{N_t N_t}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{W}_{N_t N_t} \partial \mathbf{W}_{11}} & \cdots & \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{W}_{N_t N_t} \partial \mathbf{W}_{N_t N_t}} & \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{W}_{N_t N_t}^* \partial \mathbf{W}_{11}} & \cdots & \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{W}_{N_t N_t}^* \partial \mathbf{W}_{N_t N_t}} \end{array} \right)$$

En utilisant la définition 2.5.1 du gradient complexe, la matrice Hessienne  $\mathfrak{H}_{\mathbf{W}} J$  peut s’écrire comme :

$$\mathfrak{H}_{\mathbf{W}} J = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{W}}^* (\nabla_{\mathbf{W}}^T J) & \nabla_{\mathbf{W}}^* (\nabla_{\mathbf{W}}^H J) \\ \nabla_{\mathbf{W}} (\nabla_{\mathbf{W}}^T J) & \nabla_{\mathbf{W}} (\nabla_{\mathbf{W}}^H J) \end{pmatrix}$$

Contrairement à la matrice globale  $\mathbf{G} = \tilde{\mathbf{H}}^H \mathbf{W}$  de séparation, la matrice de séparation  $\mathbf{W}$  ne nous renseigne pas sur l'état de la séparation. En effet, lorsque la matrice  $\mathbf{W}$  permet de retrouver les sources, la matrice  $\mathbf{G}$  est idéalement égale à la matrice identité à une rotation et une permutation près.

C'est pourquoi, nous utilisons dans l'étude des points stationnaires les variables  $g_{nm}$  au lieu des variables  $w_{nm}$ . Pour ce faire, nous effectuons deux changements de variables :  $J$  est exprimé en fonction des variables complexes  $g_{mn}^*$  et  $g_{mn}$  au lieu des vecteurs  $\mathbf{W}_n$ , les gradients  $\nabla_{\mathbf{W}}$  et  $\nabla_{\mathbf{W}^*}$  de  $J$  s'expriment alors comme :

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{W}} J &= \frac{\partial J}{\partial g_{11}^*} \nabla_{\mathbf{W}} g_{11}^* + \frac{\partial J}{\partial g_{12}^*} \nabla_{\mathbf{W}} g_{12}^* + \dots + \frac{\partial J}{\partial g_{1N_t}^*} \nabla_{\mathbf{W}} g_{1N_t}^* + \\ &\quad \frac{\partial J}{\partial g_{21}^*} \nabla_{\mathbf{W}} g_{21}^* + \frac{\partial J}{\partial g_{22}^*} \nabla_{\mathbf{W}} g_{22}^* + \dots + \frac{\partial J}{\partial g_{2N_t}^*} \nabla_{\mathbf{W}} g_{2N_t}^* + \dots + \\ &\quad \frac{\partial J}{\partial g_{N_t 1}^*} \nabla_{\mathbf{W}} g_{N_t 1}^* + \frac{\partial J}{\partial g_{N_t 2}^*} \nabla_{\mathbf{W}} g_{N_t 2}^* + \frac{\partial J}{\partial g_{N_t N_t}^*} \nabla_{\mathbf{W}} g_{N_t N_t}^* \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{W}^*} J &= \frac{\partial J}{\partial g_{11}} \nabla_{\mathbf{W}} g_{11} + \frac{\partial J}{\partial g_{12}} \nabla_{\mathbf{W}} g_{12} + \dots + \frac{\partial J}{\partial g_{1N_t}} \nabla_{\mathbf{W}} g_{1N_t} + \\ &\quad \frac{\partial J}{\partial g_{21}} \nabla_{\mathbf{W}} g_{21} + \frac{\partial J}{\partial g_{22}} \nabla_{\mathbf{W}} g_{22} + \dots + \frac{\partial J}{\partial g_{2N_t}} \nabla_{\mathbf{W}} g_{2N_t} + \dots + \\ &\quad \frac{\partial J}{\partial g_{N_t 1}} \nabla_{\mathbf{W}} g_{N_t 1} + \frac{\partial J}{\partial g_{N_t 2}} \nabla_{\mathbf{W}} g_{N_t 2} + \frac{\partial J}{\partial g_{N_t N_t}} \nabla_{\mathbf{W}} g_{N_t N_t} \end{aligned}$$

En définissant la matrice  $\mathcal{D}$  de dimension  $N_t^2 \times N_t^2$  comme :

$$\mathcal{D} = (\nabla_{\mathbf{W}} g_{11}^*, \nabla_{\mathbf{W}} g_{12}^*, \dots, \nabla_{\mathbf{W}} g_{N_t N_t}^*)$$

et l'opérateur gradient complexe  $\nabla_g$  par rapport au vecteur  $\mathbf{g}^* = (g_{11}^*, g_{12}^*, \dots, g_{N_t N_t}^*)^T$  :

$$\nabla_{\mathbf{g}} = \left( \frac{\partial}{\partial g_{11}^*}, \frac{\partial}{\partial g_{12}^*}, \dots, \frac{\partial}{\partial g_{N_t N_t}^*} \right)^T$$

on peut alors écrire les matrices  $\nabla_{\mathbf{W}} J$  et  $\nabla_{\mathbf{W}^*} J$  sous la forme :  $\nabla_{\mathbf{W}} J = \mathcal{D} \nabla_{\mathbf{g}} J$  et  $\nabla_{\mathbf{W}^*} J = \mathcal{D}^* \nabla_{\mathbf{g}^*} J$ .

Puisque  $g_{mn}^* = \mathbf{W}_n^H \tilde{\mathbf{H}}_m$ , on obtient :

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{H}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{H}} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \mathbf{0} & & \dots & & \tilde{\mathbf{H}} \end{pmatrix}$$

La matrice Hessienne complexe  $\mathfrak{H}_{\mathbf{W}} J$  s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_{\mathbf{W}} J &= \begin{pmatrix} \mathcal{D}^* \nabla_{\mathbf{g}}^* (\nabla_{\mathbf{g}}^T J) \mathcal{D}^T & \mathcal{D}^* \nabla_{\mathbf{g}}^* (\nabla_{\mathbf{g}}^H J) \mathcal{D}^H \\ \mathcal{D} \nabla_{\mathbf{g}} (\nabla_{\mathbf{g}}^T J) \mathcal{D}^T & \mathcal{D} \nabla_{\mathbf{g}} (\nabla_{\mathbf{g}}^H J) \mathcal{D}^H \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{D}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{D} \end{pmatrix} \mathfrak{H}_{\mathbf{g}} J \begin{pmatrix} \mathcal{D}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{D}^H \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.1)$$

avec

$$\mathfrak{H}_g J = \begin{pmatrix} \nabla_g^* (\nabla_g^T J) & \nabla_g^* (\nabla_g^H J) \\ \nabla_g (\nabla_g^T J) & \nabla_g (\nabla_g^H J) \end{pmatrix}$$

**Définition 3.4.1** Deux matrices carrées  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont dites congruentes si il existe une matrice  $\mathbf{P}$  inversible telle que  $\mathbf{A} = \mathbf{PBP}^H$ . La congruence est une relation d'équivalence.

Ainsi, d'après la définition 3.4.1 et l'équation 3.1, les matrices  $\mathfrak{H}_W J$  et  $\mathfrak{H}_g J$  sont congruentes, si  $\mathfrak{H}_g J$  est définie positive alors  $\mathfrak{H}_W J$  est aussi définie positive. Ainsi, l'étude des points stationnaires peut être faite à partir de  $\mathfrak{H}_g J$ .

### 3.4.3 Points stationnaires

D'après le théorème 3.4.1, les points stationnaires sont obtenus en résolvant le système :

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{W}_n} J = 0, & n \in \{1, \dots, N_t\} \\ \nabla_{\mathbf{W}_n^*} J = 0, & n \in \{1, \dots, N_t\} \end{cases}$$

Pour le résoudre, nous effectuons les mêmes changements de variables que nous avons définis dans le paragraphe précédent, i.e. la fonction de coût est exprimée en fonction des variables complexes  $g_{mn}^*$  et  $g_{mn}$  au lieu des vecteurs  $\mathbf{W}_n$  :

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{W}_n} J &= \frac{\partial J}{\partial g_{n1}^*} \nabla_{\mathbf{W}_n} g_{n1}^* + \frac{\partial J}{\partial g_{n2}^*} \nabla_{\mathbf{W}_n} g_{n2}^* + \dots + \frac{\partial J}{\partial g_{nN_t}^*} \nabla_{\mathbf{W}_n} g_{nN_t}^* = 0 \\ &= \tilde{\mathbf{H}}_1 \frac{\partial J}{\partial g_{n1}^*} + \tilde{\mathbf{H}}_2 \frac{\partial J}{\partial g_{n2}^*} + \dots + \tilde{\mathbf{H}}_{N_t} \frac{\partial J}{\partial g_{nN_t}^*} = 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{W}_n^*} J &= \frac{\partial J}{\partial g_{n1}} \nabla_{\mathbf{W}_n} g_{n1} + \frac{\partial J}{\partial g_{n2}} \nabla_{\mathbf{W}_n} g_{n2} + \dots + \frac{\partial J}{\partial g_{nN_t}} \nabla_{\mathbf{W}_n} g_{nN_t} = 0 \\ &= \tilde{\mathbf{H}}_1^* \frac{\partial J}{\partial g_{n1}} + \tilde{\mathbf{H}}_2^* \frac{\partial J}{\partial g_{n2}} + \dots + \tilde{\mathbf{H}}_{N_t}^* \frac{\partial J}{\partial g_{nN_t}} = 0 \end{aligned}$$

avec  $n \in \{1, \dots, N_t\}$ .

Ainsi, les vecteurs gradient  $\nabla_{\mathbf{W}_n} J$  sont une combinaison linéaire des vecteurs  $\tilde{\mathbf{H}}_m$ ,  $m \in \{1, \dots, N_t\}$ . Puisque ces vecteurs sont supposés être mutuellement indépendants, les gradients  $\nabla_{\mathbf{W}_n} J$  et  $\nabla_{\mathbf{W}_n^*} J$  s'annulent si et seulement si les dérivées partielles  $\frac{\partial J}{\partial g_{nm}}$  et  $\frac{\partial J}{\partial g_{nm}^*}$  sont toutes nulles :

$$\nabla_{\mathbf{W}_n} J = 0 \iff \frac{\partial J}{\partial g_{n1}^*} = \frac{\partial J}{\partial g_{n2}^*} = \frac{\partial J}{\partial g_{nN_t}^*} = 0, \quad n \in \{1, \dots, N_t\}$$

et

$$\nabla_{\mathbf{W}_n^*} J = 0 \iff \frac{\partial J}{\partial g_{n1}} = \frac{\partial J}{\partial g_{n2}} = \frac{\partial J}{\partial g_{nN_t}} = 0, \quad n \in \{1, \dots, N_t\}$$

On cherche donc les points qui annulent les systèmes :

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial g_{nm}} = 0, & n, m \in \{1, \dots, N_t\} \\ \frac{\partial J}{\partial g_{nm}^*} = 0, & n, m \in \{1, \dots, N_t\} \end{cases}$$

### 3.5 Recherche des minima du critère $J_{CMA} + J_{Alamouti}$

Nous allons montrer dans ce paragraphe que le critère  $J_{Alamouti}$ , proposé dans le paragraphe 3.3.1, associé au critère de séparation  $J_{CMA}$  et à la contrainte  $\mathbf{G}^H \mathbf{G} = \mathbf{I}$  permet d'obtenir une structure d'Alamouti. La redondance d'Alamouti pourra ainsi être exploitée pour réduire le TEB et l'EQM. Avant toute chose nous rappelons que  $N_t = 2$  lorsqu'un code d'Alamouti est utilisé en émission.

Les symboles estimés par la BSS associée au critère  $J_{Alamouti}$  s'expriment ainsi :

$$\begin{pmatrix} z_1(2k) & z_1(2k+1) \\ z_2(2k) & z_2(2k+1) \end{pmatrix} = \mathbf{G}^H \begin{pmatrix} s(2k) & -s^*(2k+1) \\ s(2k+1) & s^*(2k) \end{pmatrix} + \mathbf{b}(k)$$

Le critère à minimiser s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} J(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2) = E \left[ |z_1(2k)|^2 - R \right]^2 + E \left[ |z_2(2k)|^2 - R \right]^2 + \\ \frac{1}{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} |z_1(2k) - z_2^*(2k+1)|^2 \\ \text{sous } \mathbf{G}^H \mathbf{G} = \mathbf{I}_2 \end{cases}$$

avec  $N_s$  un nombre fixé de symboles reçus.

#### 3.5.1 La fonction de coût

En développant, la fonction de coût devient :

$$\begin{aligned} J = J_{CMA} + J_{Alamouti} &= E \left[ |z_1(2k)|^4 \right] - 2R \cdot E \left[ |z_1(2k)|^2 \right] + R^2 + \\ &E \left[ |z_2(2k)|^4 \right] - 2R \cdot E \left[ |z_2(2k)|^2 \right] + R^2 + \\ &\frac{1}{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} |z_1(2k) - z_2^*(2k+1)|^2 \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés statistiques et temporelles des signaux transmis, on exprime  $J$  uniquement en fonction des variables  $g_{mn}$ ,  $m, n \in \{1, 2\}$  :

$$E \left[ |z_n(2k)|^2 \right] = (|g_{1n}|^2 + |g_{2n}|^2)$$

$$E \left[ |z_n(2k)|^4 \right] = (|g_{1n}|^4 + |g_{2n}|^4) q + 4|g_{1n}|^2 |g_{2n}|^2$$

avec  $q = E \left[ |s(k)|^4 \right]$ , puisque  $\sigma_s^2 = 1$  alors  $R = q$ . Puisque les symboles transmis sont i.i.d, la moyenne temporelle est égale à la moyenne statistique. Ainsi, si  $N_s$  est suffisamment grand,  $\frac{1}{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} |s(k)|^2 \simeq \sigma_s^2$  et  $\frac{1}{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} |s(k)|^4 \simeq q$ , d'où :

$$\begin{aligned} \frac{1}{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} |z_1(2k) - z_2^*(2k+1)|^2 &= |g_{11}|^2 + |g_{21}|^2 + |g_{12}|^2 + |g_{22}|^2 + \\ &+ g_{21}^* g_{12}^* + g_{21} g_{12} - g_{11}^* g_{22}^* - g_{11} g_{22} \end{aligned}$$

Ce qui nous permet de réécrire la fonction de coût comme :

$$\begin{aligned} J(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2) = & (|g_{11}|^4 + |g_{12}|^4 + |g_{22}|^4 + |g_{21}|^4) q + \\ & (|g_{11}|^2 + |g_{12}|^2 + |g_{22}|^2 + |g_{21}|^2)(1 - 2q) + 4|g_{11}|^2|g_{21}|^2 \\ & + 4|g_{12}|^2|g_{22}|^2 + g_{21}^*g_{12}^* + g_{21}g_{12} - g_{11}^*g_{22}^* - g_{11}g_{22} + 2q^2 \end{aligned}$$

### 3.5.2 Étude des points stationnaires

On cherche donc les points qui annulent le système (S) :

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} \frac{\partial J}{\partial g_{nm}} = 0, \quad n, m \in \{1, 2\} \\ \frac{\partial J}{\partial g_{nm}^*} = 0, \quad n, m \in \{1, 2\} \end{cases}$$

tout en vérifiant la contrainte  $\mathbf{G}^H \mathbf{G} = \mathbf{I}_2$ . On obtient ainsi deux systèmes : le système (S) des gradients nuls et le système (C) des contraintes :

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} \frac{\partial J}{\partial g_{11}^*} = \left( \frac{\partial L}{\partial g_{11}} \right)^* = g_{11} \left( 2|g_{11}|^2 q + 4|g_{21}|^2 + 1 - 2q \right) - g_{22}^* = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial g_{22}^*} = \left( \frac{\partial J}{\partial g_{22}} \right)^* = g_{22} \left( 2|g_{22}|^2 q + 4|g_{12}|^2 + 1 - 2q \right) - g_{11}^* = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial g_{12}^*} = \left( \frac{\partial J}{\partial g_{12}} \right)^* = g_{12} \left( 2|g_{12}|^2 q + 4|g_{22}|^2 + 1 - 2q \right) + g_{21}^* = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial g_{21}^*} = \left( \frac{\partial J}{\partial g_{21}} \right)^* = g_{21} \left( 2|g_{21}|^2 q + 4|g_{11}|^2 + 1 - 2q \right) + g_{12}^* = 0 \end{cases}$$

$$(\mathcal{C}) \begin{cases} |g_{11}|^2 + |g_{21}|^2 = 1 \\ |g_{12}|^2 + |g_{22}|^2 = 1 \\ g_{12}^*g_{11} + g_{22}^*g_{21} = 0 \\ g_{12}g_{11}^* + g_{22}g_{21}^* = 0 \end{cases}$$

En combinant les systèmes (S) et (C) on obtient le système (S') :

$$(\mathcal{S}), (\mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{S}') \begin{cases} \frac{\partial J}{\partial g_{11}^*} = \left( \frac{\partial L}{\partial g_{11}} \right)^* = g_{11} \left( 2(q-2)(|g_{11}|^2 - 1) + 1 \right) - g_{22}^* = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial g_{22}^*} = \left( \frac{\partial J}{\partial g_{22}} \right)^* = g_{22} \left( 2(q-2)(|g_{22}|^2 - 1) + 1 \right) - g_{11}^* = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial g_{12}^*} = \left( \frac{\partial J}{\partial g_{12}} \right)^* = g_{12} \left( 2(q-2)(|g_{12}|^2 - 1) + 1 \right) + g_{21}^* = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial g_{21}^*} = \left( \frac{\partial J}{\partial g_{21}} \right)^* = g_{21} \left( 2(q-2)(|g_{21}|^2 - 1) + 1 \right) + g_{12}^* = 0 \end{cases}$$

**Propriété 3.5.1** *Les points suivants sont solutions du système  $(S')$  et correspondent ainsi à des points stationnaires du critère  $J$  sous la contrainte  $\mathbf{G}^H \mathbf{G} = \mathbf{I}_2$  :*

$$\begin{cases} g_{11} = g_{22}^* \text{ et } g_{12} = g_{21} = 0 \text{ avec } |g_{11}|^2 = |g_{22}|^2 = 1 \\ g_{12} = -g_{21}^* \text{ et } g_{11} = g_{22} = 0 \text{ avec } |g_{21}|^2 = |g_{12}|^2 = 1 \end{cases}$$

**Preuve 3.5.1** *Le coefficient  $q$  des signaux de télécommunications numériques prend des valeurs comprises entre 1 et 2 ( $1 \leq q < 2$ ) et d'après les contraintes les coefficients  $g_{mn}$  sont encadrés de la manière suivante :  $0 \leq |g_{mn}|^2 \leq 1$ . Ces encadrements nous permettent d'obtenir les inégalités suivantes :*

$$q - 2 < 0, |g_{mn}|^2 - 1 \leq 0 \quad \forall m, n \in \{1, 2\} \Rightarrow 2(q - 2)(|g_{mn}|^2 - 1) + 1 \geq 1$$

Ainsi, des équations de  $(S')$  et de ces inégalités, nous en déduisons :

$$(S') \Rightarrow \begin{cases} |g_{11}| \leq |g_{22}| \text{ et } |g_{11}| \geq |g_{22}| \\ |g_{12}| \leq |g_{21}| \text{ et } |g_{21}| \leq |g_{12}| \end{cases}$$

Nous pouvons donc en conclure que :

$$\begin{cases} |g_{11}| = |g_{22}| \\ \text{et} \\ |g_{12}| = |g_{21}| \end{cases}$$

Et pour que les équations du système  $(S')$  vérifient ces égalités, il faut que :

$$\forall n, m, g_{mn} = 0 \text{ ou } 2(q - 2)(|g_{mn}|^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow g_{mn} = 0 \text{ ou } |g_{mn}|^2 = 1$$

D'après le système des contraintes  $(C)$ , les implications suivantes peuvent être déduites :

$$\begin{cases} |g_{11}|^2 = |g_{22}|^2 = 1 \Rightarrow g_{21} = g_{12} = 0 \text{ puisque } |g_{11}|^2 + |g_{21}|^2 = 1 \text{ et } |g_{12}|^2 + |g_{22}|^2 = 1 \\ \text{et} \\ |g_{12}|^2 = |g_{21}|^2 = 1 \Rightarrow g_{22} = g_{11} = 0 \end{cases}$$

De plus, en prenant les arguments du système  $(S')$ , nous obtenons les relations suivantes :

$$\begin{cases} |g_{11}| = |g_{22}| \text{ et } \arg(g_{11}) = -\arg(g_{22}) \Rightarrow g_{11} = g_{22}^* \\ \text{et} \\ |g_{12}| = |g_{21}| \text{ et } \arg(g_{12}) = -\arg(g_{21}) + \pi \Rightarrow g_{21} = -g_{12}^* \end{cases}$$

Donc, les points suivants correspondent à des points stationnaires du critère  $J$  sous la contrainte  $\mathbf{G}^H \mathbf{G} = \mathbf{I}_2$  :

$$\begin{cases} g_{11} = g_{22}^* \text{ et } g_{12} = g_{21} = 0 \text{ avec } |g_{11}|^2 = |g_{22}|^2 = 1 \\ g_{12} = -g_{21}^* \text{ et } g_{11} = g_{22} = 0 \text{ avec } |g_{21}|^2 = |g_{12}|^2 = 1 \end{cases}$$

**Propriété 3.5.2** *Ces points stationnaires correspondent à des minima de notre critère  $J$  sous la contrainte  $\mathbf{G}^H \mathbf{G} = \mathbf{I}_2$ .*

**Preuve 3.5.2** *Pour savoir si ces deux points stationnaires correspondent à des minima, nous devons étudier la matrice Hessienne  $\mathfrak{H}_g L$  en chacun de ces points.*

*Les blocs de celle-ci sont donnés, dans le cas général, par :*



$$\nabla_g(\nabla_g J)^H = \begin{pmatrix} (4q-4)|g_{11}|^2 + 1 - 2q & 4g_{11}^* g_{21} & 0 & 0 \\ 4g_{21}^* g_{11} & (4q-4)|g_{21}|^2 + 1 - 2q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (4q-4)|g_{12}|^2 + 1 - 2q & 4g_{12}^* g_{22} \\ 0 & 0 & 4g_{22}^* g_{12} & (4q-4)|g_{22}|^2 + 1 - 2q \end{pmatrix}$$

$$\nabla_g(\nabla_g J)^T = \begin{pmatrix} 2g_{11}^2 q & 4g_{11} g_{21} & 0 & -1 \\ 4g_{11} g_{21} & 2g_{21}^2 q & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2g_{12}^2 q & 4g_{12} g_{22} \\ -1 & 0 & 4g_{12} g_{22} & 2g_{22}^2 q \end{pmatrix}$$

Afin de déterminer si la matrice Hessienne  $\mathfrak{H}_g L$  est semi-définie positive, nous allons étudier le signe des valeurs propres. Les symboles transmis proviennent de signaux de transmission de télécommunication, le kurtosis normalisé des symboles est encadré de la manière suivante :  $1 \leq \frac{q}{\sigma_s^4} < 2$  où  $\sigma_s^4 = 1$ . Les deux points stationnaires conduisent aux mêmes valeurs propres toutes positives ou nulles :

$$\begin{cases} 0, \text{ d'ordre de multiplicité } 1 \\ 2 > 0, \text{ d'ordre de multiplicité } 1 \\ -2(q-3) > 0, \text{ d'ordre de multiplicité } 2 \\ -2(q-2) > 0, \text{ d'ordre de multiplicité } 2 \\ 4q > 0, \text{ d'ordre de multiplicité } 1 \\ 2(2q+1) > 0, \text{ d'ordre de multiplicité } 1 \end{cases}$$

Ainsi, les deux points stationnaires correspondent à des minima. En posant  $g_{22} = e^{j\Phi}$  et  $g_{12} = e^{j\Psi}$ , on obtient deux matrices  $\mathbf{G}$  minimisant la fonction de coût  $J$  :

$$\mathbf{G}_1 = \begin{pmatrix} e^{-j\Phi} & 0 \\ 0 & e^{j\Phi} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathbf{G}_2 = \begin{pmatrix} 0 & e^{j\Psi} \\ -e^{-j\Psi} & 0 \end{pmatrix}$$

### 3.6 Minima des critères $J_{CMA} + J_{\mathcal{G}_3}$ et $J_{Or}$

Les méthodes de recherche des minima des critères  $J_{CMA} + J_{\mathcal{G}_3}$  et  $J_{Or}$  étant assez proches de la recherche théorique des minima du critère  $J_{CMA} + J_{Alamouti}$ , nous les présentons en annexe B et C respectivement.

#### 3.6.1 Minima du critère $J_{CMA} + J_{\mathcal{G}_3}$

L'unique minimum du critère  $J_{CMA} + J_{\mathcal{G}_3}$  sous  $\mathbf{G}^H \mathbf{G} = \mathbf{I}$  est  $g_{11} = g_{22} = g_{33}$  et  $g_{mn} = 0$ ,  $m < n \in \{1, \dots, 3\}$  avec  $|g_{11}|^2 = |g_{22}|^2 = |g_{33}|^2 = 1$ . En posant  $g_{11} = e^{j\Phi}$ , seule la matrice  $\mathbf{G}$  suivante permet de minimiser  $J_{CMA} + J_{\mathcal{G}_3}$  :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} e^{j\Phi} & 0 & 0 \\ 0 & e^{j\Phi} & 0 \\ 0 & 0 & e^{j\Phi} \end{pmatrix}$$

Le critère proposé permet donc de retrouver, en sortie de l'égaliseur, les symboles dans le bon ordre mais à une rotation de phase près identique sur chacune des sorties.

Code STBC	Critère et nombre de minima	Matrices globales correspondants aux minima	
Alamouti $\mathbf{z} = \mathbf{G}^H \mathbf{x}$ Symboles codés $N_t = 2$	$J = J_{BSS} + J_{alamouti}$ $J_{alamouti} = \frac{1}{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} \left(  z_1(2k) - z_2^*(2k+1) ^2 \right)$ 2 minima	$\mathbf{G}^H = \mathbf{W}^H \mathbf{H}$	$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} e^{j\Phi} & 0 \\ 0 & e^{-j\Phi} \end{pmatrix}$ $\Phi \in [0, 2\pi]$ sans permutation $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & e^{j\Psi} \\ -e^{-j\Psi} & 0 \end{pmatrix}$ $\Psi \in [0, 2\pi]$ si permutation
Tarokh $\mathbf{z} = \mathbf{G}^H \mathbf{x}$ Symboles codés $N_t = 3$	$J = J_{BSS} + J_{\mathcal{G}_3}$ $J_{\mathcal{G}_3} = \frac{1}{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} \left(  2z_1(4k) - z_2(4k+1) - z_3(4k+2) ^2 \right)$ 1 minimum	$\mathbf{G}^H = \mathbf{W}^H \mathbf{H}$	$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} e^{j\Phi} & 0 & 0 \\ 0 & e^{j\Phi} & 0 \\ 0 & 0 & e^{j\Phi} \end{pmatrix}$
Or $\mathbf{t} = \mathbf{C}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{G}^H & 0 \\ 0 & \mathbf{G}^H \end{pmatrix} \mathbf{C} \mathbf{s}$ Symboles non codés $N_t = 2$	$J_{Or} = \sum_{n=1}^{N_t} ( t_n(k) ^2 - R)^2$ 2 minima	$\mathbf{G}^H = \mathbf{W}^H \mathbf{H}$ $\mathbf{G}'^H = \begin{pmatrix} \mathbf{G}^H & 0 \\ 0 & \mathbf{G}^H \end{pmatrix}$	$\mathbf{G}' = \begin{pmatrix} e^{j\Phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{j\Phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{j\Phi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{j\Phi} \end{pmatrix}$ sans permutation $\mathbf{G}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e^{j\Psi} \\ 0 & 0 & -e^{j\Psi} & 0 \\ 0 & -je^{j\Psi} & 0 & 0 \\ je^{j\Psi} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec permutation

TAB. 3.4 – Tableau récapitulatif des fonctions de coût associées aux codes STBC et leur minima

### 3.6.2 Minima du critère $J_{Or}$

La fonction de coût associée au code d'or et à une contrainte d'orthogonalité possède deux minima. Nous rappelons que la matrice  $\mathbf{G}'$  permet de retrouver les symboles non-codés  $s(k)$  et que la matrice  $\mathbf{G}$  permet de retrouver les symboles codés  $x_n(k)$ . Les matrices  $\mathbf{G}'$  et  $\mathbf{G}$  correspondant au premier minimum permettent de retrouver respectivement les symboles non codés et codés dans le bon ordre (i.e croissant) et avec la même phase :

$$\mathbf{G}'_1 = \begin{pmatrix} e^{j\Phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{j\Phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{j\Phi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{j\Phi} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{G}_1 = \begin{pmatrix} e^{j\Phi} & 0 \\ 0 & e^{j\Phi} \end{pmatrix}$$

Et les matrices  $\mathbf{G}'$  et  $\mathbf{G}$  correspondant au deuxième minimum permettent de retrouver respectivement les symboles non codés et codés dans l'ordre décroissant et avec une même phase à  $k\pi/2$  près :

$$\mathbf{G}'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e^{j\Psi} \\ 0 & 0 & -e^{j\Psi} & 0 \\ 0 & -je^{j\Psi} & 0 & 0 \\ je^{j\Psi} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{G}_2 = \begin{pmatrix} 0 & e^{j\Psi} \\ -je^{j\Psi} & 0 \end{pmatrix}$$

Le tableau 3.4 résume les fonctions de coût utilisées pour chaque type de code STBC, le nombre de minima ainsi que la matrice globale  $\mathbf{G}$ .

## 3.7 Implémentation des critères

Nous implémentons les critères  $J_{BSS} + J_{Alamouti}$ ,  $J_{BSS} + J_{G_3}$  et  $J_{Or}$  en utilisant l'algorithme du gradient stochastique. L'équation de mise à jour de la matrice d'égalisation  $\tilde{\mathbf{W}}$  est donnée par :

$$\tilde{\mathbf{W}}_n(k+1) = \tilde{\mathbf{W}}_n(k) - \mu \mathbf{s}_n(k)$$

Avec  $\mu$  le pas d'adaptation. Lorsque le critère CM est associé au critère  $J_{Alamouti}$  ( $N_t = 2$ ), le vecteur  $\mathbf{s}_n(k)$  est :

$$\begin{cases} \mathbf{s}_1(k) = \left( (|z_1(2k)|^2 - R) z_1^*(2k) + z_1^*(2k) - z_2(2k+1) \right) \underline{\mathbf{y}}(2k) \\ \mathbf{s}_2(k) = \left( (|z_2(2k)|^2 - R) z_2^*(2k) \underline{\mathbf{y}}(2k) - (z_1(2k) - z_2^*(2k+1)) \underline{\mathbf{y}}(2k+1) \right) \end{cases}$$

Lorsque le critère CM est associé au critère  $J_{G_3}$  ( $N_t = 3$ ), le vecteur  $\mathbf{s}_n(k)$  devient :

$$\begin{cases} \mathbf{s}_1(k) = \left( |z_1(4k)|^2 - R \right) z_1^*(4k) \underline{\mathbf{y}}(4k) + 2(2z_1(4k) - z_p(4k+1) - z_p(4k+2)) \underline{\mathbf{y}}(4k) \\ \mathbf{s}_2(k) = \left( |z_2(4k)|^2 - R \right) z_2^*(4k) \underline{\mathbf{y}}(4k) + (2z_1(4k) - z_p(4k+1) - z_p(4k+2)) \underline{\mathbf{y}}(4k+1), \\ \mathbf{s}_3(k) = \left( |z_3(4k)|^2 - R \right) z_3^*(4k) \underline{\mathbf{y}}(4k) + (2z_1(4k) - z_p(4k+1) - z_p(4k+2)) \underline{\mathbf{y}}(4k+2), \end{cases}$$

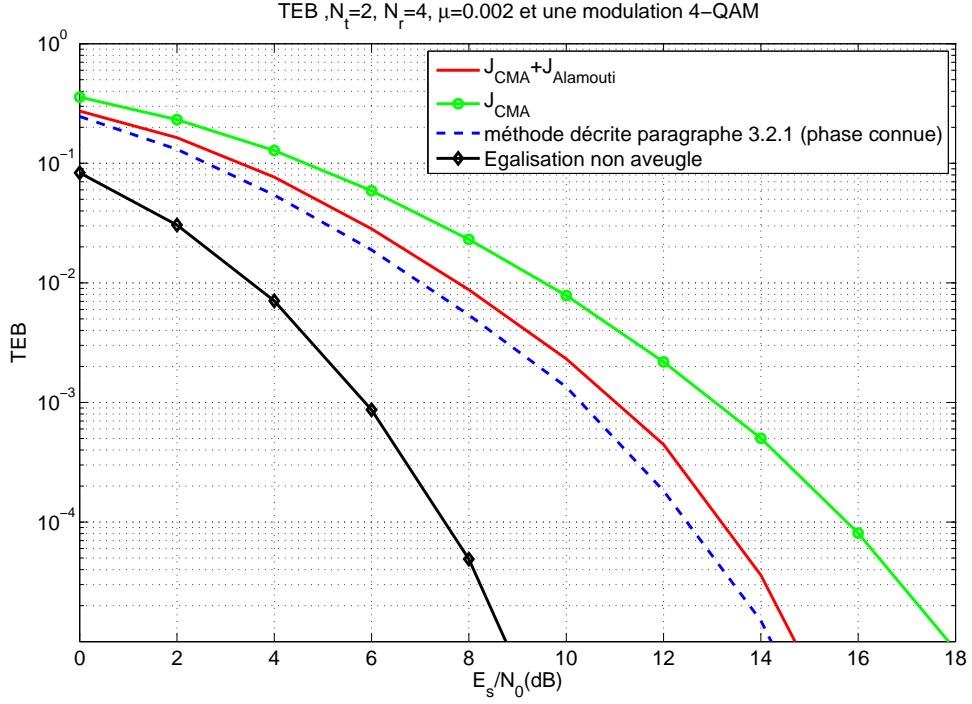


FIG. 3.1 – TEB lorsqu'un code d'Alamouti est utilisé en émission

Finalement, pour estimer les symboles issus d'un code d'Or ( $N_t = 2$ ), le vecteur  $\mathbf{s}_n(k)$  est donné par :

$$\begin{cases} \mathbf{s}_1(k) = \frac{\bar{\theta}}{\alpha} \left[ \left( |t_1(2k)|^2 - R \right) t_1^*(2k) \mathbf{y}(2k+1) - j \left( |t_3(2k)|^2 - R \right) t_3^*(2k) \mathbf{y}(2k) \right] + \\ \quad \frac{1}{\alpha} \left[ \left( |t_2(2k)|^2 - R \right) t_2^*(2k) \mathbf{y}(2k+1) + \left( |t_4(2k)|^2 - R \right) t_4^*(2k) \mathbf{y}(2k) \right] \\ \mathbf{s}_2(k) = \frac{\theta}{\alpha} \left[ \left( |t_1(2k)|^2 - R \right) t_1^*(2k) \mathbf{y}(2k+1) - j \left( |t_3(2k)|^2 - R \right) t_3^*(2k) \mathbf{y}(2k) \right] - \\ \quad \frac{1}{\alpha} \left[ \left( |t_2(2k)|^2 - R \right) t_2^*(2k) \mathbf{y}(2k+1) - j \left( |t_4(2k)|^2 - R \right) t_4^*(2k) \mathbf{y}(2k) \right] \end{cases}$$

La matrice  $\mathbf{W}$  satisfaisant la contrainte est ensuite obtenue à l'aide d'une orthogonalisation de Gram-Schmidt de la matrice  $\tilde{\mathbf{W}}$ .

### 3.8 Simulations

Les simulations sont effectuées lorsque les symboles résultent d'une modulation 4-QAM et sont transmis sur un canal de Gauss. Le pas d'adaptation des algorithmes est fixé à 0,002. Les codes utilisés à l'émission sont le code d'Alamouti, de Tarokh et d'Or et les traitements utilisés en réception sont ceux présentés dans ce chapitre. Les performances de ces méthodes sont évaluées en termes de TEB et de SINR. Pour tracer les TEB nous avons utilisé  $10^7$  symboles. Sur ces  $10^7$  symboles un nouveau canal, indépendant du précédent, est généré tous les  $10^4$  symboles. Les symboles considérés pour tracer les TEB sont obtenus après convergence des différents algorithmes.

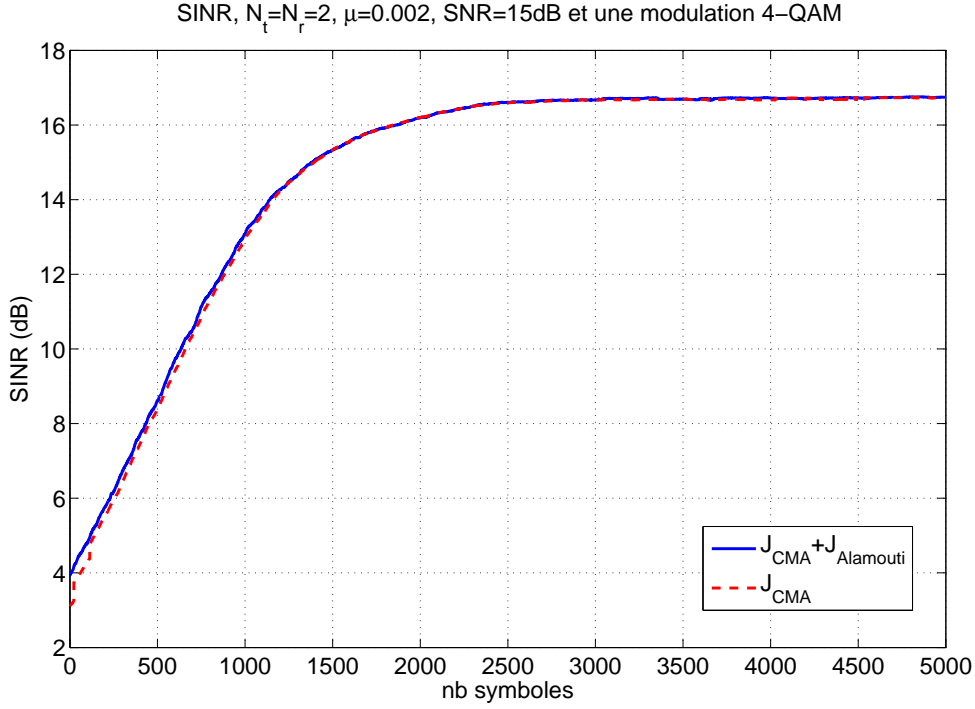


FIG. 3.2 – SINR lorsqu'un code d'Alamouti est utilisé en émission

### 3.8.1 Code d'Alamouti

L'algorithme associé au critère  $J_{CMA} + J_{Alamouti}$  est comparé à l'algorithme CMA et à l'algorithme décrit dans le paragraphe 3.2.1. Cette dernière méthode permet de retrouver les symboles dans le bon ordre après un traitement en sortie de la BSS, mais elle suppose que l'indétermination sur la phase en sortie de la BSS est parfaitement levée, lors des simulations ces ambiguïtés de phase seront donc levées manuellement.

En sortie des algorithmes CMA et  $J_{CMA} + J_{Alamouti}$  les symboles sont retrouvés à une permutation près et/ou à une rotation près. Afin de mesurer le TEB et le SINR en sortie de ces algorithmes, ces différentes indéterminations seront levées manuellement.

La figure 3.1 représente le TEB obtenu lorsque deux antennes sont utilisées en émission et quatre en réception. Le TEB du CMA, de l'association  $J_{CMA}$  et  $J_{Alamouti}$  et de l'algorithme proposé dans le paragraphe 3.2.1 sont comparés.

Nous pouvons noter que le TEB obtenu par la méthode décrite au paragraphe 3.2.1 est inférieur au TEB obtenu par l'algorithme utilisant le critère  $J_{CMA} + J_{Alamouti}$ . Ainsi, un gain de 0,7 dB en termes de RSB est observé pour un TEB fixé à  $10^{-3}$ . Les TEB obtenus par ces deux méthodes devraient être identiques puisqu'elles effectuent le même type de moyennage des symboles en sortie de la BSS. Cependant, puisque la phase introduite par la BSS est complètement supprimée avant d'appliquer la méthode décrite au paragraphe 3.2.1, nous observons une petite différence entre ces deux TEB.

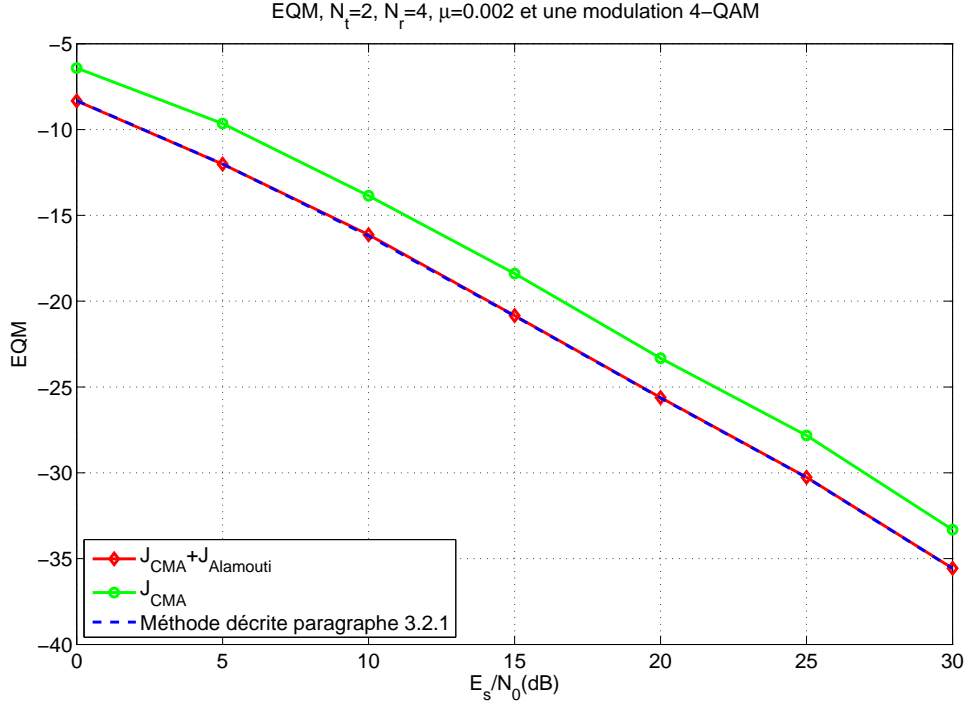


FIG. 3.3 – EQM lorsqu'un code d'Alamouti est utilisé en émission

L'algorithme utilisant le critère  $J_{CMA} + J_{Alamouti}$  permet d'atteindre un gain de 2 dB en termes de RSB par rapport au CMA utilisé seul pour un TEB fixé à  $10^{-3}$ . En effet, ce dernier n'exploite pas du tout la redondance introduite par le code d'Alamouti, d'où cette différence.

Nous avons comparé les performances de ces différents algorithmes aveugles avec un égaliseur d'Alamouti utilisé en connaissant parfaitement le canal de transmission. Nous pouvons noter qu'une différence de 4,1 dB en termes de RSB est observé entre le TEB obtenu par l'algorithme utilisant le critère  $J_{CMA} + J_{Alamouti}$  et le TEB obtenu en non aveugle lorsque le TEB est fixé à  $10^{-3}$ .

La figure 3.2 représente le SINR obtenu par l'algorithme CMA et par l'algorithme basé sur l'association  $J_{CMA}$  et  $J_{Alamouti}$ . Nous pouvons noter que les deux courbes se superposent parfaitement, ainsi l'association du critère  $J_{Alamouti}$  avec le critère  $J_{CMA}$  ne détériore pas mais n'améliore pas non plus les performances par rapport au critère  $J_{CMA}$  utilisé seul.

Les EQM obtenues avec le CMA, avec l'association  $J_{CMA}$  et  $J_{Alamouti}$  et avec l'algorithme proposé dans le paragraphe 3.2.1 sont présentées dans la figure 3.3. Nous pouvons noter que les EQM obtenues par ces deux dernières méthodes sont inférieures de 3 dB à l'EQM obtenue par la BSS utilisée seule. Cela confirme l'étude théorique réalisée en annexe A.

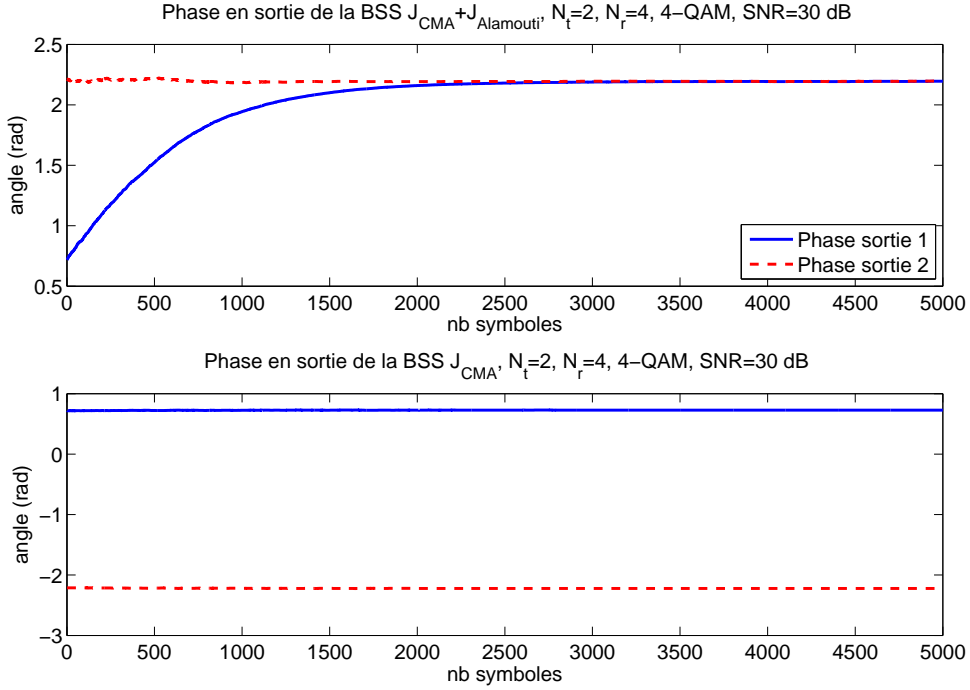


FIG. 3.4 – Phases obtenues en sortie des BSS lorsqu'un code d'Alamouti est utilisé en émission et lorsqu'il n'y a pas de permutation

Les phases obtenues en sortie des deux BSS ( $J_{CMA}$  et  $J_{CMA} + J_{Alamouti}$ ) lorsqu'il n'y a pas de permutation sur les lignes sont représentées sur la figure 3.4. Ainsi, nous remarquons que les phases obtenues en sortie de la BSS utilisant le critère  $J_{CMA} + J_{Alamouti}$  convergent vers le même angle alors que les phases en sortie du CMA sont différentes sur les deux voies.

### 3.8.2 Code de Tarokh $\mathcal{G}_3$

L'algorithme utilisant le critère  $J_{CMA} + J_{\mathcal{G}_3}$  est comparé avec l'algorithme CMA utilisé seul et avec la méthode que nous avons proposée dans le paragraphe 3.2.2 pour retrouver l'ordre des sources. Cette dernière méthode supposant que l'ambiguïté sur la phase en sortie de la BSS est parfaitement levée, nous l'éliminerons manuellement lors des simulations.

Le CMA retrouve les sources avec une ambiguïté de phase et d'ordre et l'algorithme basé sur le critère  $J_{CMA} + J_{\mathcal{G}_3}$  les retrouve avec une ambiguïté de phase modulo  $k\pi$ . Toutes ces indéterminations seront levées manuellement lors des simulations afin de pouvoir tracer le TEB et le SINR.

La figure 3.5 représente le TEB de l'algorithme CMA, de l'algorithme utilisant les critères  $J_{CMA}$  et  $J_{\mathcal{G}_3}$ , et de l'algorithme proposé dans le paragraphe 3.2.2. L'algorithme basé sur le critère  $J_{CMA} + J_{\mathcal{G}_3}$  permet d'atteindre un gain de 8 dB en termes de RSB par rapport au CMA utilisé seul et un gain de 4 dB par rapport au CMA suivi de l'exploitation de la redondance proposée dans le paragraphe 3.2.2 pour un TEB fixé à  $10^{-1}$ . Ainsi, l'algorithme que nous avons proposé dans ce chapitre atteint les meilleures performances,

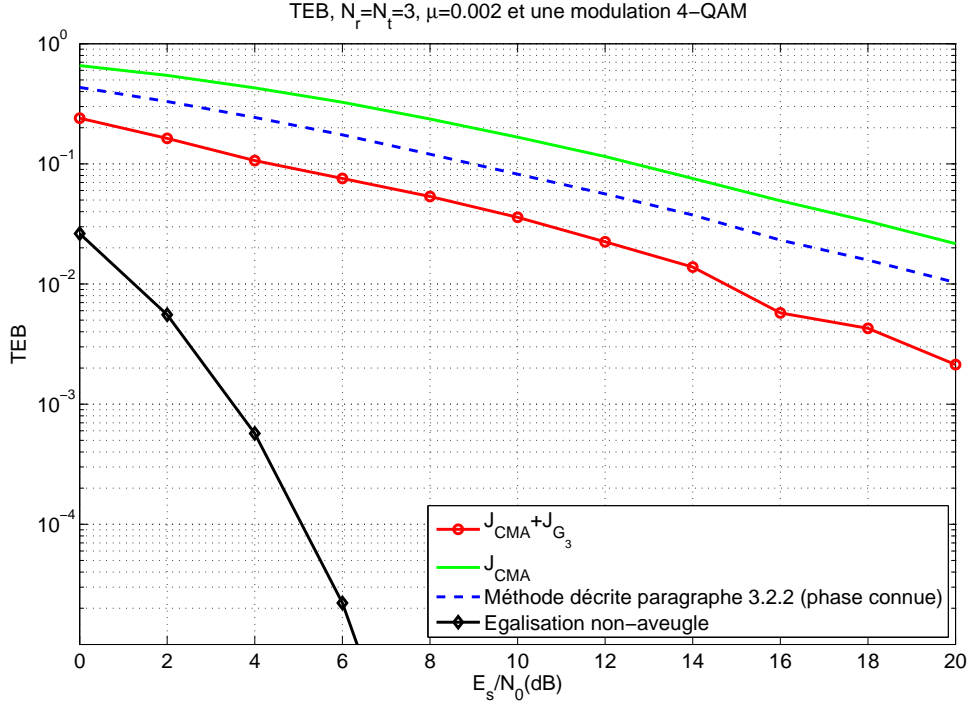


FIG. 3.5 – TEB lorsqu'un code de Tarokh est utilisé en émission

par ailleurs il permet de lever l'ambiguïté sur la phase à  $k\pi$  près et l'ordre en sortie de la BSS.

Les TEB obtenus de manière aveugle ont été comparés avec le TEB obtenu à l'aide d'un égaliseur de Tarokh qui utilise le canal parfaitement connu pour estimer les symboles. Nous observons alors une différence de 14 dB en termes de SNR avec le TEB obtenu en utilisant le critère  $J_{CMA} + J_{G_3}$  pour un TEB fixé à  $10^{-2}$ .

Les SINR obtenus à un SNR de 15 dB par le CMA et par l'association  $J_{CMA}$  et  $J_{G_3}$  sont présentés sur la figure 3.6. Nous pouvons noter que l'algorithme que nous proposons ne diminue ni la vitesse de convergence ni le SINR atteint en régime stationnaire par rapport à l'algorithme CMA.

Les EQM obtenues par le CMA, le CMA associé au critère  $J_{G_3}$  et le CMA suivi de la méthode proposée au paragraphe 3.2.2 sont présentés sur la figure 3.7. Nous remarquons que l'EQM obtenue par notre méthode est inférieure de 6,5 dB par rapport au CMA et de 3 dB par rapport à la méthode proposée dans le paragraphe 3.2.2. Cela confirme la théorie des paragraphes 3.2.2 et 3.3.2.

Finalement, la figure 3.8 permet de mettre en évidence la convergence de l'algorithme vers une même indétermination de phase contrairement au CMA, dont les sorties sont obtenues avec trois phases arbitraires différentes.



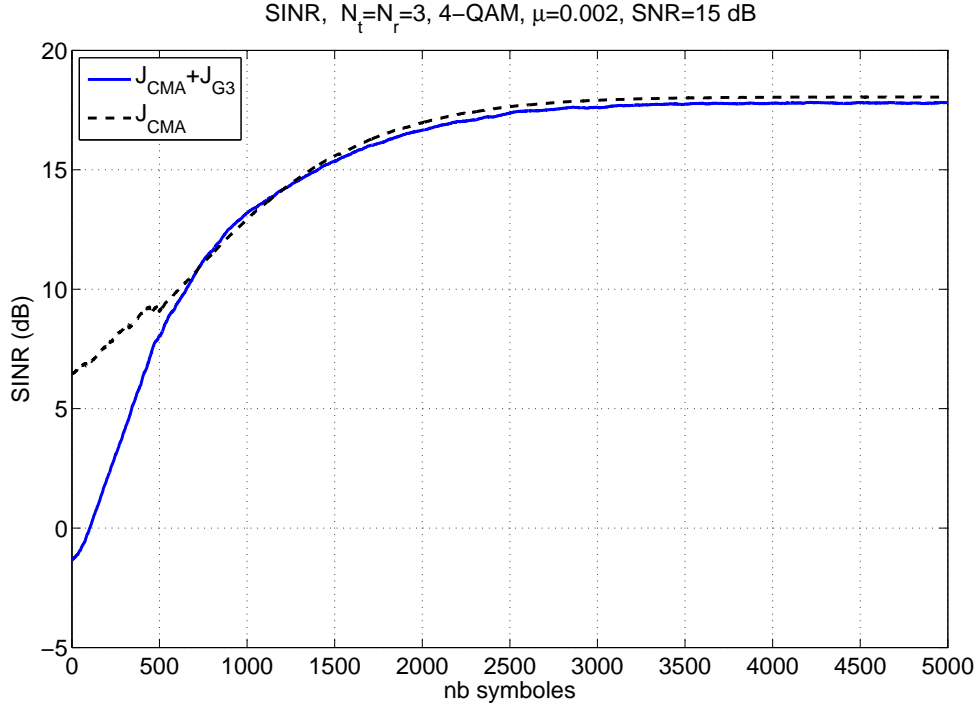


FIG. 3.6 – SINR lorsqu'un code de Tarokh est utilisé en émission

### 3.8.3 Code d'Or

L'algorithme associé au critère  $J_{Or}$  est comparé à l'algorithme CMA appliqué aux vecteurs  $\mathbf{Y}(k) = (\mathbf{y}^T(2k) \mathbf{y}^T(2k+1))^T$  afin de retrouver les  $2N_t$  sources non-codées à une phase et permutation près. Nous n'utilisons pas le CMA sur les vecteur  $\mathbf{Y}(k)$ , car cette méthode nous conduirait à obtenir les symboles codés avec une phase et une permutation près rendant ainsi impossible la récupération des symboles non-codés.

La figure 3.9 représente les SINR obtenus avec le critère proposé implémenté à l'aide d'un gradient stochastique à pas variable et le CMA à pas fixe et variable pour un RSB de 15 dB. Dans tous les cas, le critère que nous proposons converge plus vite que le CMA et atteint un SINR plus élevé en régime stationnaire. Nous pouvons remarquer que le CMA à pas variable converge 10 fois plus vite que le CMA à pas fixe tout en atteignant le même SINR final.

La figure 3.10 permet de mettre en évidence la convergence de l'algorithme vers une même indétermination de phase, contrairement au CMA qui retrouve les sources avec une phase arbitraire sur chaque sortie. Nous pouvons noter que les phases en sorties 1 et 3 de l'algorithme  $J_{Or}$  sont identiques et il en est de même pour les sorties 2 et 4. Cela vient de la relation entre les deux matrices de séparations  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{G}'$  (décrites en annexe C) :

$$\mathbf{G}'^H = \mathbf{C}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{G}^H & 0 \\ 0 & \mathbf{G}^H \end{pmatrix} \mathbf{C}$$

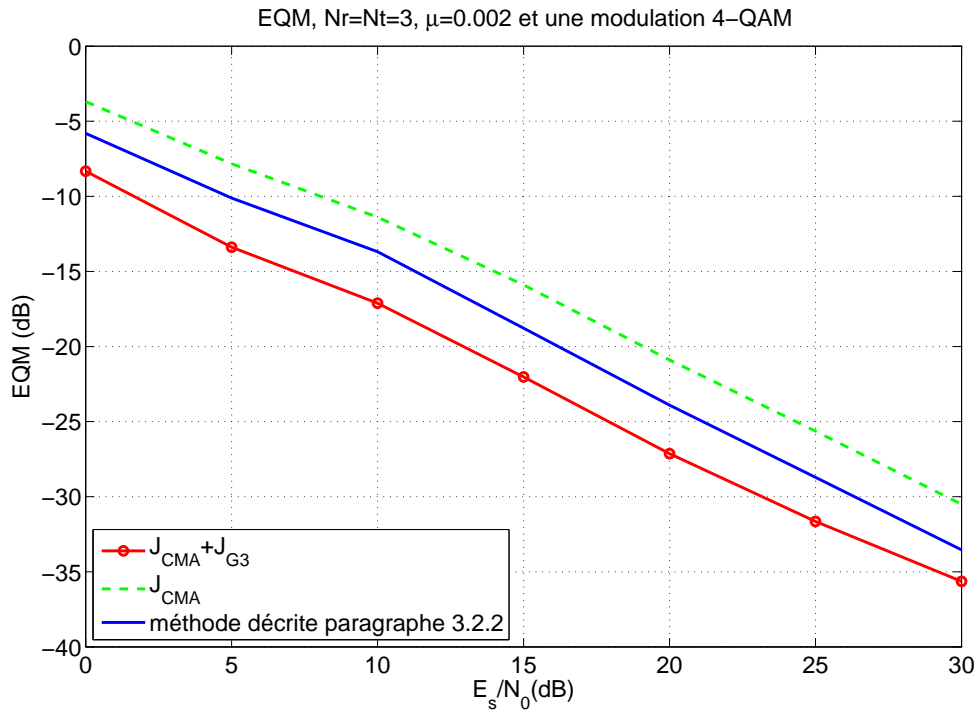


FIG. 3.7 – EQM lorsqu'un code de Tarokh est utilisé à l'émission

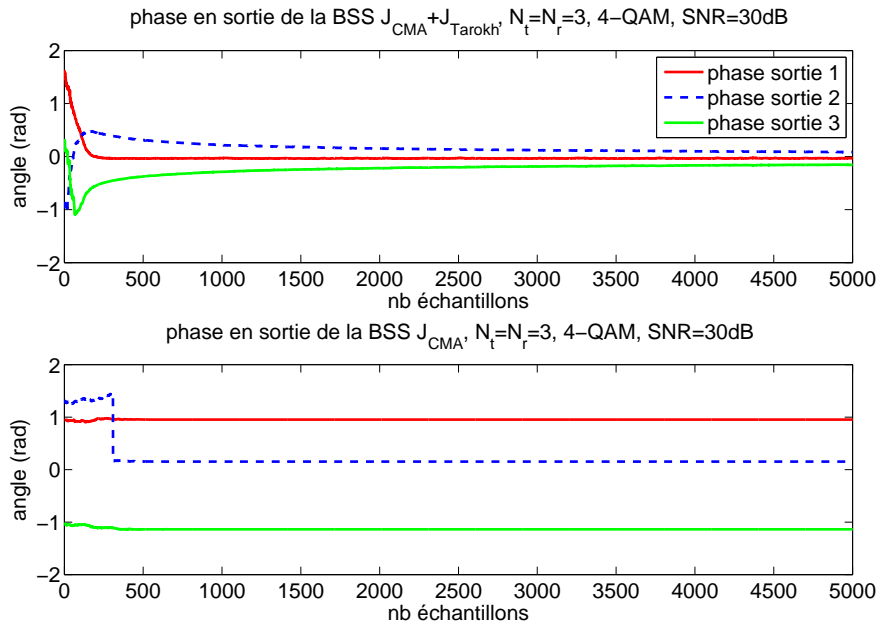


FIG. 3.8 – Phases obtenues en sortie des BSS lorsqu'un code de Tarokh est utilisé en émission

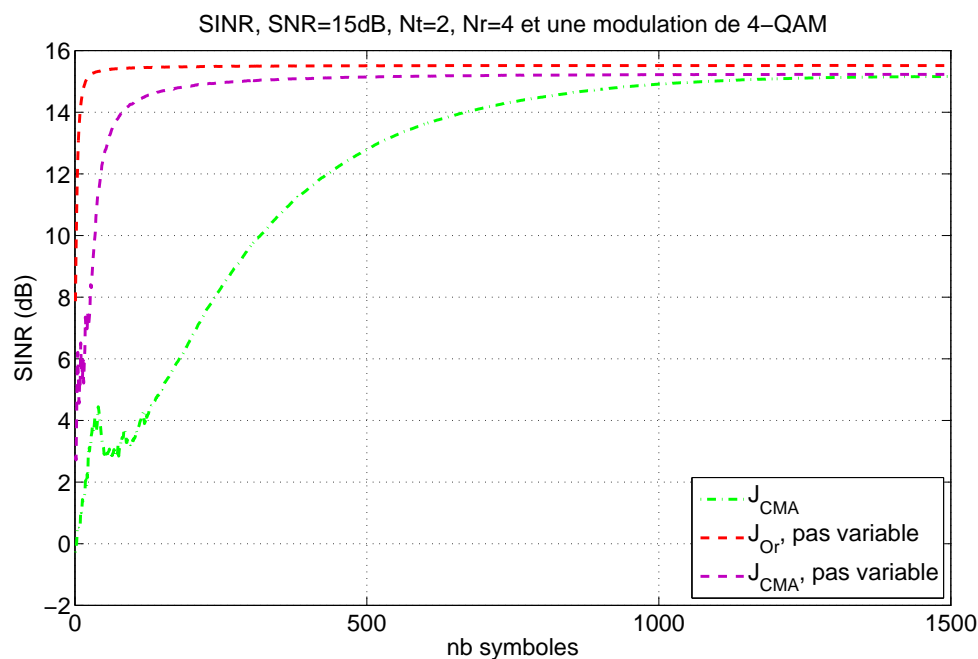


FIG. 3.9 – SINR lorsqu'un code d'Or est utilisé en émission

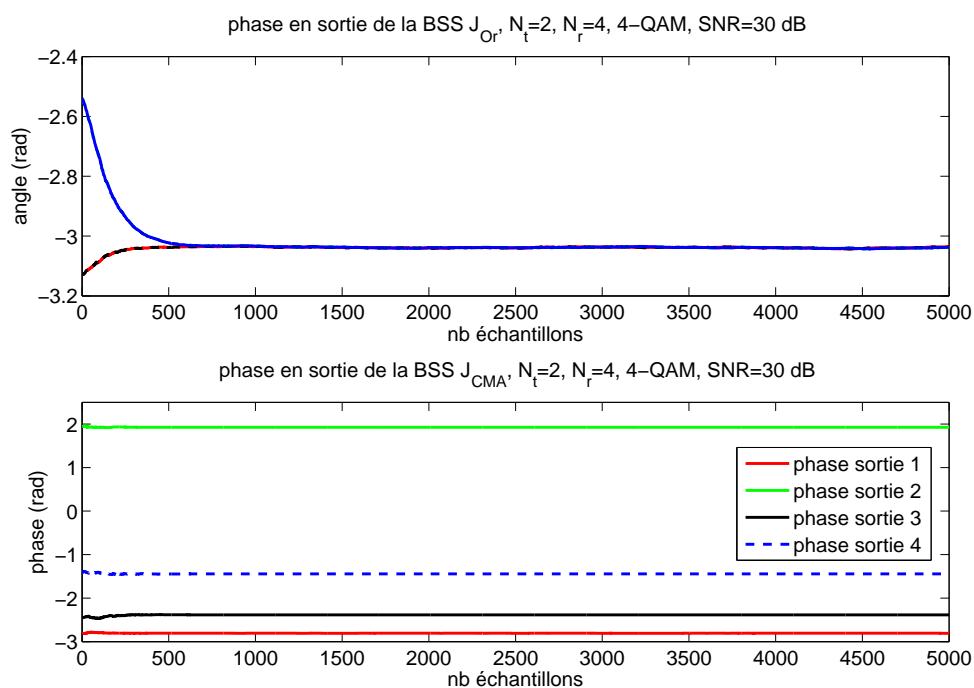


FIG. 3.10 – Phases obtenues en sortie des BSS lorsqu'un code d'Or est utilisé en émission

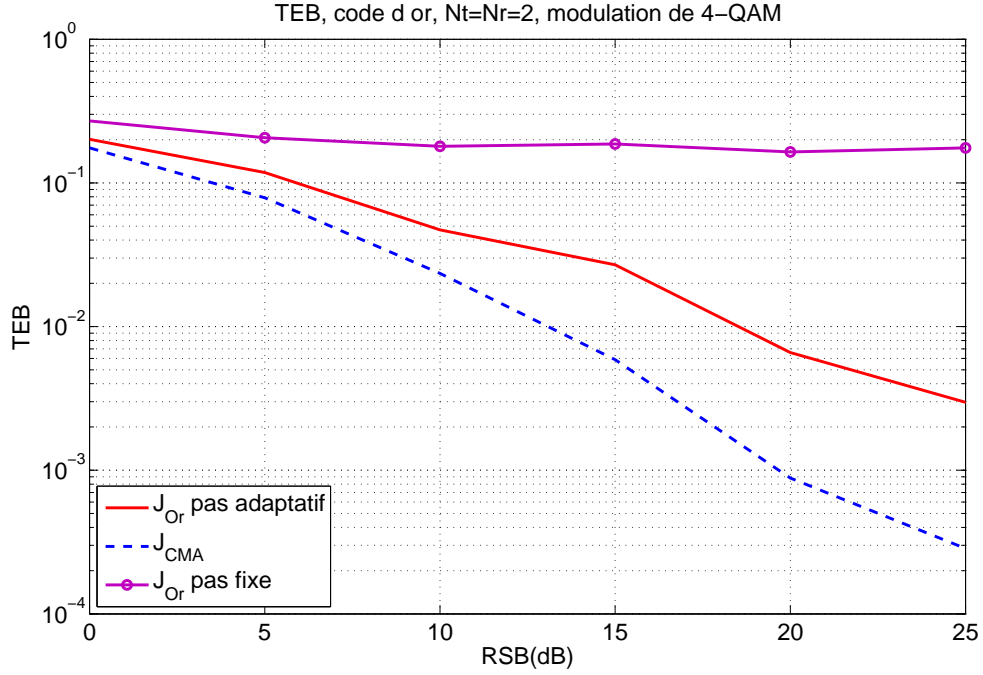


FIG. 3.11 – TEB lorsqu'un code d'Or est utilisé en émission

Ainsi, lorsque  $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} e^{j\phi_1} & 0 \\ 0 & e^{j\phi_2} \end{pmatrix}$  alors  $\mathbf{G}' = \begin{pmatrix} e^{j\phi_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{j\phi_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{j\phi_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{j\phi_2} \end{pmatrix}$ .

Maintenant que nous avons fait ressortir l'intérêt de l'algorithme associé au critère  $J_{Or}$ , nous allons comparer les TEB moyens obtenus par le CMA et par l'algorithme que nous proposons implémenté à l'aide d'un gradient stochastique à pas fixe et à pas variable. Le principe du gradient stochastique utilisant un pas variable a été présenté dans le chapitre 2.

La courbe présentée par la figure 3.11 a été obtenue à l'aide de 1000 réalisations indépendantes, 10000 symboles et 2 antennes réceptrices.

Dès l'observation de ces résultats, nous sommes interpellés par la médiocrité des résultats obtenus par l'algorithme associé au critère  $J_{Or}$  puisque ce dernier obtenait de très bonnes performances en termes de SINR. Afin d'expliquer cela, nous avons analysé les différents points de convergence obtenus par cet algorithme. Il en ressort qu'en dehors des deux points stationnaires mis en évidence dans l'étude de convergence (Annexe C), l'algorithme converge vers deux autres points non stationnaires :

$$\begin{cases} g'_1 = -g'_2, |g'_1| = 1/\sqrt{5} \text{ et } g'_3 = g'_4 = 0 \\ \text{ou} \\ g'_3 = g'_4, |g'_3| = 1/\sqrt{5} \text{ et } g'_1 = g'_2 = 0 \end{cases}$$

Pour plus d'informations sur les coefficients  $g'_n$ , voir annexe C.

Nous avons montré dans l'annexe C, que les points stationnaires sont solutions du système (8). Or ces deux points ne le sont pas, puisque :

$$\begin{aligned} & g'_1 = -g'_2, |g'_1| = 1/\sqrt{5} \text{ et } g'_3 = g'_4 = 0 \\ \Rightarrow & \begin{cases} \frac{\partial J}{\partial g'_1} = \left(\frac{\partial J}{\partial g'_1}\right)^* = -\frac{\partial J}{\partial g'_2} = -\left(\frac{\partial J}{\partial g'_2}\right)^* = g'_1 \left(\frac{128}{5} - 32/5q\right) \neq 0 \\ \frac{\partial J}{\partial g'_3} = \left(\frac{\partial J}{\partial g'_3}\right)^* = \frac{\partial J}{\partial g'_4} = \left(\frac{\partial J}{\partial g'_4}\right)^* = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & g'_3 = g'_4, |g'_3| = 1/\sqrt{5} \text{ et } g'_1 = g'_2 = 0 \\ \Rightarrow & \begin{cases} \frac{\partial J}{\partial g'_3} = \left(\frac{\partial J}{\partial g'_3}\right)^* = -\frac{\partial J}{\partial g'_4} = -\left(\frac{\partial J}{\partial g'_4}\right)^* = g'_3 \left(\frac{128}{5} - 32/5q\right) \neq 0 \\ \frac{\partial J}{\partial g'_1} = \left(\frac{\partial J}{\partial g'_1}\right)^* = \frac{\partial J}{\partial g'_2} = \left(\frac{\partial J}{\partial g'_2}\right)^* = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Puisque ces points n'annulent pas les dérivées partielles du critère  $J_{Or}$ , ce ne sont pas des points stationnaires de notre système. On constate que ces deux points conduisent à la valeur suivante du critère :  $J_{Or} = 4q(q - 4) + 64/25$  alors que la valeur minimale du critère vaut  $J_{Or} = 4q(q - 4)$ .

### Limite du gradient stochastique à pas fixe

Nous pouvons donc retenir à travers cet exemple qu'une des limites d'utilisation du gradient stochastique à pas fixe réside en sa convergence vers des points indésirables et non stationnaires. Une des solutions pour éviter cela est l'utiliser un gradient stochastique à pas variable.

Ainsi, lorsque nous utilisons un pas adaptatif sur le critère  $J_{Or}$ , cela permet d'éviter que l'algorithme du gradient ne converge vers ces points non désirables. Les performances du gradient, que nous avons proposé, à pas adaptatif sont donc meilleures en termes de TEB par rapport à l'algorithme à pas fixe. Cependant, cela ne permet pas d'avoir d'aussi bonnes performances que l'algorithme CMA classique.

## 3.9 Conclusion

La séparation aveugle de sources empêche d'exploiter la redondance des codes STBC de par l'ambiguïté de phase et d'ordre qu'elle introduit sur les signaux séparés. Ainsi, en utilisant un critère en complément de la BSS, nous pouvons exploiter la redondance des codes MIMO pour retrouver une même phase sur chaque ligne en sortie de la BSS et pour réduire l'EQM et le TEB.

Nous avons donc proposé dans ce chapitre des critères associés aux codes OSTBC d'Alamouti, de Tarokh et au code STBC d'Or afin de lever certaines ambiguïtés (tableau 3.5). D'autre part, ces critères permettent de retrouver les symboles avec la même ambiguïté de phase et sans permutation des lignes pour le code de Tarokh. Ces critères permettent donc de réduire le nombre d'inconnues (phase et ordre) introduites par les BSS traditionnelles. Le critère proposé pour le code d'Or peut être utilisé plus généralement sur tout code linéaire en bloc moyennant quelques modifications.

Les trois critères que nous avons proposés dans ce chapitre sont non exhaustifs vis à vis des nombreux codes STBC existant, ainsi d'autres critères peuvent être proposés pour exploiter la redondance introduite par tout code STBC.

Fonction de coût	Indétermination sur la phase	Indétermination sur l'ordre
$J_{CM}$	quelconque et différente sur chaque ligne	Oui
$J_{MM}, J_{SCM}$	$k\pi/2$ et différente sur chaque ligne	Oui
$J_{CM} + J_{Alamouti}$	$k\pi/2$ et identique sur chaque ligne	Oui
$J_{CM} + J_{Tarokh}$	$k\pi$ et identique sur chaque ligne	Non
$J_{Or}$	$k\pi/2$ et identique sur chaque ligne	Oui

TAB. 3.5 – Résumé des ambiguïtés levées grâce aux fonctions de coût proposées



## Chapitre 4

# Deux algorithmes analytiques : l'AMMA et l'ASCMA

Dans le chapitre 2 nous avons présenté quelques algorithmes de séparations aveugle de sources et notamment les algorithmes MMA, CMA et SCMA. Nous avons pu voir que, contrairement à l'algorithme CMA, les algorithmes MMA et SCMA permettent d'effectuer la poursuite du résidu de porteuse conjointement à la séparation de sources.

Cependant, ces deux algorithmes implémentés à l'aide d'un gradient stochastique possèdent une convergence lente, ainsi leurs performances se dégradent lorsqu'ils sont utilisés dans un environnement sélectif en temps. Pour obtenir une convergence rapide, nous pouvons utiliser l'algorithme ACMA adaptatif, mais ce dernier doit utiliser à sa sortie un algorithme de poursuite de phase. Ainsi, nous présentons dans ce chapitre un algorithme minimisant le critère MM à l'aide de méthodes analytiques telles que celles proposées par Van Der Veen pour le CMA, ainsi que sa version simplifiée qui minimise le critère SCM. Nous avons baptisé ces deux algorithmes AMMA<sup>(1)</sup> et ASCMA<sup>(2)</sup> respectivement.

Dans ce chapitre nous allons tout d'abord reformuler le problème d'optimisation MM à l'aide de méthodes algébriques, puis nous chercherons, en nous appuyant sur une étude théorique, le sous-espace contenant la solution du problème d'optimisation. Enfin, nous présenterons une implémentation par bloc et adaptative pour minimiser les critères Analytical MultiModulus et Analytical Simplified Constant Modulus.

### 4.1 Fonction de coût

Nous considérons la fonction de coût MM :

$$J_{MM} = \sum_{m=1}^{N_t} \left( E \left[ \left( \Re(\mathbf{z}_m(k))^2 - R_r \right)^2 \right] + E \left[ \left( \Im(\mathbf{z}_m(k))^2 - R_i \right)^2 \right] \right)$$

où  $R_r = R_i = R = \frac{E[|\Re(s(k))|^4]}{E[|\Re(s(k))|^2]}$  et les symboles séparés  $\mathbf{z}(k)$  s'expriment comme :

$$z_n(k) = \mathbf{w}_n^H \underline{\mathbf{y}}(k), \quad n \in \{1, \dots, N_t\}$$

---

<sup>(1)</sup> Analytical MultiModulus Algorithm

<sup>(2)</sup> Analytical Simplified Constant Modulus Algorithm



Nous rappelons que le vecteur  $\underline{\mathbf{y}}(k)$  de dimension  $N_t \times 1$  représente les signaux reçus blanchis et  $\mathbf{W} = (\mathbf{w}_1 \dots \mathbf{w}_{N_t})$  est la matrice de séparation, où chaque  $\mathbf{w}_n$  représente la  $n^e$  colonne de  $\mathbf{W}$ .

Afin d'écrire le symbole  $z_n(k)$  sous la forme  $a + jb$  nous définissons la matrice réelle  $\mathbf{T} = (\mathbf{t}_1 \dots \mathbf{t}_{N_t})$  de dimension  $2N_t \times N_t$  et les vecteurs réels  $\underline{\tilde{\mathbf{y}}}(k)$  et  $\underline{\bar{\mathbf{y}}}(k)$  de dimension  $2N_t \times 1$  :

$$\mathbf{t}_n = \begin{pmatrix} \Re(\mathbf{w}_n) \\ \Im(\mathbf{w}_n) \end{pmatrix}, \underline{\tilde{\mathbf{y}}}(k) = \begin{pmatrix} \Re(\underline{\mathbf{y}}(k)) \\ \Im(\underline{\mathbf{y}}(k)) \end{pmatrix}, \underline{\bar{\mathbf{y}}}(k) = \begin{pmatrix} \Im(\underline{\mathbf{y}}(k)) \\ -\Re(\underline{\mathbf{y}}(k)) \end{pmatrix}$$

Ainsi, l'expression de  $z_n(k)$  devient :

$$z_n(k) = \mathbf{t}_n^T \underline{\tilde{\mathbf{y}}}(k) + j \mathbf{t}_n^T \underline{\bar{\mathbf{y}}}(k), n \in \{1, \dots, N_t\}$$

On peut noter que les vecteurs  $\underline{\tilde{\mathbf{y}}}(k)$  et  $\underline{\bar{\mathbf{y}}}(k)$  sont liés par la relation suivante :

$$\underline{\bar{\mathbf{y}}}(k) = \mathbf{\Gamma} \underline{\tilde{\mathbf{y}}}(k)$$

avec  $\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{N_t} & \mathbf{I}_{N_t} \\ -\mathbf{I}_{N_t} & \mathbf{0}_{N_t} \end{pmatrix}$ . La matrice  $\mathbf{\Gamma}$  possède les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} -\mathbf{\Gamma} &= \mathbf{\Gamma}^T = \mathbf{\Gamma}^{-1} \\ \mathbf{\Gamma} \otimes \mathbf{\Gamma} &= (\mathbf{\Gamma} \otimes \mathbf{\Gamma})^T = (\mathbf{\Gamma} \otimes \mathbf{\Gamma})^{-1} \end{aligned}$$

Afin d'implémenter le critère MM de manière algébrique, ce dernier est réécrit comme un problème des moindres carrés :

$$J_{AMMA}(\mathbf{z}) = \frac{1}{N_s} \sum_{m=1}^{N_t} \sum_{k=1}^{N_s} \left( \left( \Re(\mathbf{z}_m(k))^2 - R_r \right)^2 + \left( \Im(\mathbf{z}_m(k))^2 - R_i \right)^2 \right)$$

avec  $N_s$  un nombre fixé de symboles transmis.

L'implémentation algébrique de ce critère utilise les propriétés du produit de Kronecker  $\otimes$  :

$$\text{vec}(\mathbf{a}\mathbf{b}^H) = \mathbf{b}^* \otimes \mathbf{a} \quad (4.1)$$

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = \mathbf{AC} \otimes \mathbf{BD} \quad (4.2)$$

$$\text{vec}(\mathbf{ABC}) = (\mathbf{C}^T \otimes \mathbf{A}) \text{vec}(\mathbf{B}) \quad (4.3)$$

$$\text{vec}(\mathbf{A} \text{diag}(\mathbf{b}) \mathbf{C}) (\mathbf{C}^T \circ \mathbf{A}) \mathbf{b} \quad (4.4)$$

où l'opérateur  $\text{vec}(\mathbf{A})$  range les colonnes de la matrice  $\mathbf{A}$  les unes après les autres dans un vecteur  $\mathbf{a}$ ,  $\text{diag}(\mathbf{a})$  est une matrice diagonale construite à partir du vecteur  $\mathbf{a}$  et  $\circ$  est le produit de Khatri-Rao :  $\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = (\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{b}_1 \ \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{b}_2 \dots)$ .

Dans ce chapitre, les méthodes analytiques proposées par Van Der Veen [VLLS05] pour minimiser le critère CM sont réutilisées et adaptées au critère MM. De plus, nous proposons une recherche du sous-espace contenant la solution.

Les propriétés 4.1 et 4.3 du produit de Kronecker conduisent à l'écriture du carré des parties réelles et imaginaires de  $z_n(k)$  sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\Re^2(z_l(k)) &= \mathbf{t}_l^T (\tilde{\mathbf{y}}(k) \tilde{\mathbf{y}}^T(k)) \mathbf{t}_l \\ &= (\tilde{\mathbf{y}}(k) \otimes \tilde{\mathbf{y}}(k))^T (\mathbf{t}_l \otimes \mathbf{t}_l) \\ \text{et} \\ \Im^2(z_l(k)) &= \mathbf{t}_l^T (\tilde{\mathbf{y}}(k) \tilde{\mathbf{y}}^T(k)) \mathbf{t}_l \\ &= (\tilde{\mathbf{y}}(k) \otimes \tilde{\mathbf{y}}(k))^T (\mathbf{t}_l \otimes \mathbf{t}_l) \\ &= [(\mathbf{\Gamma} \otimes \mathbf{\Gamma})(\tilde{\mathbf{y}}(k) \otimes \tilde{\mathbf{y}}(k))]^T (\mathbf{t}_l \otimes \mathbf{t}_l)\end{aligned}$$

Soit les deux matrices  $\tilde{\mathbf{Y}}$  et  $\bar{\mathbf{Y}}$  de dimension  $N_t \times N_s$ , définies comme :

$\tilde{\mathbf{Y}} = (\tilde{\mathbf{y}}(0), \dots, \tilde{\mathbf{y}}(N_s - 1))$  et  $\bar{\mathbf{Y}} = (\bar{\mathbf{y}}(0), \dots, \bar{\mathbf{y}}(N_s - 1))$ . En utilisant la définition du produit de Khatri-Rao, nous obtenons les matrices

$\tilde{\mathbf{P}} = (\tilde{\mathbf{Y}} \circ \tilde{\mathbf{Y}})^T$  et  $\bar{\mathbf{P}} = (\bar{\mathbf{Y}} \circ \bar{\mathbf{Y}})^T$  de dimension  $N_s \times (2N_t)^2$ . Le vecteur issu du produit de Kronecker de  $\mathbf{t}_l$  avec lui-même est appelé  $\mathbf{d}_l$  :  $\mathbf{d}_l = \mathbf{t}_l \otimes \mathbf{t}_l$  et possède une dimension de  $(2N_t)^2 \times 1$ . Ces notations permettent d'écrire la fonction de coût MM sous la forme suivante :

$$J_{AMMA}(\mathbf{d}_l) = \frac{1}{N_s} \sum_{l=1}^{N_t} \left[ \|\tilde{\mathbf{P}} \mathbf{d}_l - R \mathbf{1}\|^2 + \|\bar{\mathbf{P}} \mathbf{d}_l - R \mathbf{1}\|^2 \right]$$

avec  $R = R_i = R_r$  et  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T$ .

Le système linéaire peut être réécrit en utilisant une décomposition QR :

Soit  $\mathbf{Q}$ , une matrice unitaire de dimension  $N_s \times N_s$  et telle que  $\mathbf{Q} \mathbf{1} = \sqrt{N_s} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ .

Après avoir effectué une factorisation QR de  $(\mathbf{1} \tilde{\mathbf{P}})$  et  $(\mathbf{1} \bar{\mathbf{P}})$  et en appliquant  $\mathbf{Q}$  à  $(\mathbf{1} \tilde{\mathbf{P}})$  et  $(\mathbf{1} \bar{\mathbf{P}})$ , nous obtenons :

$$\mathbf{Q}(\mathbf{1} \tilde{\mathbf{P}}) = \sqrt{N_s} \begin{pmatrix} 1 & \tilde{\boldsymbol{\gamma}}^T \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{O}} \end{pmatrix} \quad \mathbf{Q}(\mathbf{1} \bar{\mathbf{P}}) = \sqrt{N_s} \begin{pmatrix} 1 & \bar{\boldsymbol{\gamma}}^T \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{O}} \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

avec  $\mathbf{1}$  un vecteur colonne composé de  $N_s$  un,  $\mathbf{0}$  un vecteur colonne composé de  $N_s - 1$  zéros,  $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^T$  et  $\bar{\boldsymbol{\gamma}}^T$  deux vecteurs lignes de dimension  $1 \times (2N_t)^2$  et  $\tilde{\mathbf{O}}$  et  $\bar{\mathbf{O}}$  deux matrices de dimension  $N_s - 1 \times (2N_t)^2$ .

alors

$$\tilde{\mathbf{P}} \mathbf{d}_l = R \mathbf{1} \Leftrightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{1} \tilde{\mathbf{P}}) \begin{pmatrix} -R \\ \mathbf{d}_l \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{\boldsymbol{\gamma}}^T \mathbf{d}_l = R \\ \tilde{\mathbf{O}} \mathbf{d}_l = \mathbf{0} \end{cases}$$

et

$$\bar{\mathbf{P}} \mathbf{d}_l = R \mathbf{1} \Leftrightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{1} \bar{\mathbf{P}}) \begin{pmatrix} -R \\ \mathbf{d}_l \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{\boldsymbol{\gamma}}^T \mathbf{d}_l = R \\ \bar{\mathbf{O}} \mathbf{d}_l = \mathbf{0} \end{cases}$$

La fonction de coût devient :

$$J_{AMMA}(\mathbf{d}_l) = \frac{1}{N_s} \sum_{l=1}^{N_t} \left[ |\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^T \mathbf{d}_l - R|^2 + |\bar{\boldsymbol{\gamma}}^T \mathbf{d}_l - R|^2 + \|\tilde{\mathbf{O}} \mathbf{d}_l\|^2 + \|\bar{\mathbf{O}} \mathbf{d}_l\|^2 \right]$$

où  $|\tilde{\gamma}^T \mathbf{d}_l - R|^2$  et  $|\bar{\gamma}^T \mathbf{d}_l - R|^2$  permettent d'éviter la solution triviale  $\mathbf{d}_l = \mathbf{0}$ . L'élévation au carré des équations 4.5, nous permet d'obtenir les expressions des vecteurs  $\tilde{\gamma}$  et  $\bar{\gamma}$ , et des matrices  $\tilde{\mathbf{C}} = \tilde{\mathbf{O}}^T \tilde{\mathbf{O}}$  et  $\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{O}}^T \bar{\mathbf{O}}$  :

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma} &= \frac{1}{N_s} \tilde{\mathbf{P}}^T \mathbf{1} = \frac{1}{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} \tilde{\mathbf{y}}(k) \otimes \tilde{\mathbf{y}}(k) \\ \tilde{\mathbf{C}} &= \tilde{\mathbf{O}}^T \tilde{\mathbf{O}} = \frac{1}{N_s} \tilde{\mathbf{P}}^T \tilde{\mathbf{P}} - \frac{1}{N_s} \tilde{\mathbf{P}}^T \mathbf{1} \cdot \frac{1}{N_s} \mathbf{1}^T \tilde{\mathbf{P}} \\ &= \frac{1}{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} (\tilde{\mathbf{y}}(k) \otimes \tilde{\mathbf{y}}(k)) (\tilde{\mathbf{y}}(k) \otimes \tilde{\mathbf{y}}(k))^T - \frac{1}{N_s^2} \left( \sum_{k=1}^{N_s} \tilde{\mathbf{y}}(k) \otimes \tilde{\mathbf{y}}(k) \right) \left( \sum_{k=1}^{N_s} \tilde{\mathbf{y}}(k) \otimes \tilde{\mathbf{y}}(k) \right)^T\end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned}\bar{\gamma} &= \frac{1}{N_s} \bar{\mathbf{P}}^T \mathbf{1} = \frac{1}{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} \bar{\mathbf{y}}(k) \otimes \bar{\mathbf{y}}(k) \\ \bar{\mathbf{C}} &= \bar{\mathbf{O}}^T \bar{\mathbf{O}} = \frac{1}{N_s} \bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{P}} - \frac{1}{N_s} \bar{\mathbf{P}}^T \mathbf{1} \cdot \frac{1}{N_s} \mathbf{1}^T \bar{\mathbf{P}} \\ &= \frac{1}{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} (\bar{\mathbf{y}}(k) \otimes \bar{\mathbf{y}}(k)) (\bar{\mathbf{y}}(k) \otimes \bar{\mathbf{y}}(k))^T - \frac{1}{N_s^2} \left( \sum_{k=1}^{N_s} \bar{\mathbf{y}}(k) \otimes \bar{\mathbf{y}}(k) \right) \left( \sum_{k=1}^{N_s} \bar{\mathbf{y}}(k) \otimes \bar{\mathbf{y}}(k) \right)^T\end{aligned}$$

En utilisant la définition des matrices de covariance estimées de  $\tilde{\mathbf{y}}(k)$  et  $\bar{\mathbf{y}}(k)$ , nommées respectivement  $\hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{y}}}$  et  $\hat{\mathbf{R}}_{\bar{\mathbf{y}}}$ , et en utilisant la propriété 4.1 du produit de Kronecker, on obtient les égalités suivantes :

$$\tilde{\gamma} = \text{vec} \left( \frac{1}{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} \tilde{\mathbf{y}}(k) \tilde{\mathbf{y}}^T(k) \right) = \text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{y}}})$$

et

$$\bar{\gamma} = \text{vec} \left( \frac{1}{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} \bar{\mathbf{y}}(k) \bar{\mathbf{y}}^T(k) \right) = \text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_{\bar{\mathbf{y}}})$$

Ainsi :

$$\tilde{\gamma}^T \mathbf{d}_l = \text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{y}}})^T (\mathbf{t}_l \otimes \mathbf{t}_l) = \mathbf{t}_l^T \hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{y}}} \mathbf{t}_l \quad (4.6)$$

et

$$\bar{\gamma}^T \mathbf{d}_l = \text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_{\bar{\mathbf{y}}})^T (\mathbf{t}_l \otimes \mathbf{t}_l) = \mathbf{t}_l^T \hat{\mathbf{R}}_{\bar{\mathbf{y}}} \mathbf{t}_l \quad (4.7)$$

Le critère  $J_{AMMA}$  est minimisé lorsque  $\tilde{\gamma}^T \mathbf{d}_l = R$ ,  $\bar{\gamma}^T \mathbf{d}_l = R$ ,  $\|\tilde{\mathbf{O}} \mathbf{d}_l\|^2 = 0$  et  $\|\bar{\mathbf{O}} \mathbf{d}_l\|^2 = 0$ .

Par la suite nous considérerons  $\tilde{\gamma}^T \mathbf{d}_l = R$ ,  $\bar{\gamma}^T \mathbf{d}_l = R$  comme des contraintes. Puisque les signaux reçus ont été pré-blanchis, nous avons  $\hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{y}}} = \hat{\mathbf{R}}_{\bar{\mathbf{y}}} = \mathbf{I}$  et ainsi :

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}^T \mathbf{d}_l &= \bar{\gamma}^T \mathbf{d}_l \\ &= \mathbf{t}_l^T \hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{y}}} \mathbf{t}_l = \mathbf{t}_l^T \hat{\mathbf{R}}_{\bar{\mathbf{y}}} \mathbf{t}_l \\ &= \mathbf{t}_l^T \mathbf{t}_l = \|\mathbf{t}_l\|^2 \\ &= R\end{aligned}$$

D'autre part,  $\|\mathbf{d}_l\|^2 = (\mathbf{t}_l \otimes \mathbf{t}_l)^T (\tilde{\mathbf{t}}_l \otimes \mathbf{t}_l) = \|\mathbf{t}_l\|^4 = R^2$  Ainsi,  $\tilde{\gamma}^T \mathbf{d}_l = \bar{\gamma}^T \mathbf{d}_l = R \Leftrightarrow \|\mathbf{d}_l\| = R$ , et à un facteur d'échelle près, le problème d'optimisation devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_l &= \arg \min_{\substack{\mathbf{d}_l(k)=\mathbf{t}_l(k) \otimes \mathbf{t}_l(k) \\ \|\mathbf{d}_l(k)\|=R}} \sum_{l=1}^{N_t} \left( \|\tilde{\mathbf{O}} \mathbf{d}_l\|^2 + \|\bar{\mathbf{O}} \mathbf{d}_l\|^2 \right) \\ &= \arg \min_{\substack{\mathbf{d}_l(k)=\mathbf{t}_l(k) \otimes \mathbf{t}_l(k) \\ \|\mathbf{d}_l(k)\|=R}} \sum_{l=1}^{N_t} \left( \mathbf{d}_l^T \tilde{\mathbf{O}}^T \tilde{\mathbf{O}} \mathbf{d}_l + \mathbf{d}_l^T \bar{\mathbf{O}}^T \bar{\mathbf{O}} \mathbf{d}_l \right) \\ &= \arg \min_{\substack{\mathbf{d}_l(k)=\mathbf{t}_l(k) \otimes \mathbf{t}_l(k) \\ \|\mathbf{d}_l(k)\|=R}} \sum_{l=1}^{N_t} \mathbf{d}_l^T(k) \left( \tilde{\mathbf{C}}(k) + \bar{\mathbf{C}}(k) \right) \mathbf{d}_l(k) \end{aligned}$$

## 4.2 Recherche du sous-espace contenant la solution

Nous allons démontrer maintenant que les vecteurs  $\mathbf{d}_l$ ,  $\forall l \in \{1 \dots N_t\}$ , qui minimisent la fonction de coût  $\sum_{l=1}^{N_t} \mathbf{d}_l^T (\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}}) \mathbf{d}_l$  sous les hypothèses  $\mathbf{d}_l = \mathbf{t}_l \otimes \mathbf{t}_l$  et  $\|\mathbf{d}_l\| = R$ , sont dans l'image de  $\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}}$ .

Tout d'abord, nous allons reformuler le problème d'optimisation à l'aide des propriétés de  $\tilde{\mathbf{C}}$  et  $\bar{\mathbf{C}}$  :

**Propriété 4.2.1** *Les matrices  $\tilde{\mathbf{C}}$  et  $\bar{\mathbf{C}}$  sont symétriques et semi-définies positives.*

La démonstration de cette propriété est détaillée dans l'annexe D.

**Lemme 4.2.1**  $\mathbf{d}_l^T (\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}}) \mathbf{d}_l \geq 0$ ,  $\forall l \in \{1, \dots, N_t\}$  et ainsi,

$$\arg \min_{\substack{\mathbf{d}_l=\mathbf{t}_l \otimes \mathbf{t}_l \\ \|\mathbf{d}_l\|=R}} \sum_{l=1}^{N_t} \mathbf{d}_l^T (\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}}) \mathbf{d}_l \Leftrightarrow \arg \min_{\substack{\mathbf{d}_l=\mathbf{t}_l \otimes \mathbf{t}_l \\ \|\mathbf{d}_l\|=R}} \mathbf{d}_l^T (\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}}) \mathbf{d}_l, \quad \forall l \in \{1, \dots, N_t\}$$

Par la suite, nous utiliserons le noyau, noté  $\ker$ , et l'image de  $\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}}$ . Ces deux sous-espaces de  $\mathbb{R}^{(2N_t)^2}$  sont définis de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \ker (\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}}) &= \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{(2N_t)^2} / (\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}}) \mathbf{y} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^{(2N_t)^2}} \right\} \\ \text{image} (\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}}) &= \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{(2N_t)^2} / \mathbf{z} = (\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}}) \mathbf{y}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{(2N_t)^2} \right\} \end{aligned}$$

**Théorème du rang**  $\text{rang} (\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}}) + \dim (\ker (\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}})) = \dim (\mathbb{R}^{(2N_t)^2})$ , et  $\ker (\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}})$  et  $\text{image} (\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}})$  sont des sous-espaces de  $\mathbb{R}^{(2N_t)^2}$ .

Pour simplifier les calculs, nous allons supposer dans ce paragraphe que deux antennes sont utilisées en émission ( $N_t = 2$ ). Ainsi,  $\dim (\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}}) = (2N_t)^2 \times (2N_t)^2 = 16 \times 16$ .

Nous allons maintenant prouver que la solution  $\mathbf{d}_l$  minimisant  $\mathbf{d}_l^T (\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}}) \mathbf{d}_l$  sous la contrainte  $\mathbf{d}_l = \mathbf{t}_l \otimes \mathbf{t}_l$  est soit :

- dans le noyau de  $\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}}$ , l'unique solution dans ce sous-espace est le vecteur  $0_{\mathbb{R}^{16}}$ , or  $0_{\mathbb{R}^{16}}$  est une solution triviale à éviter.
- dans l'image de  $\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}}$ . Nous montrerons que seuls les vecteurs dans l'image de  $\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}}$  peuvent avoir une structure de Kronecker.

**Définition 4.2.1** *Par construction, les colonnes de  $\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}}$  sont liées de la manière suivante :  $C_2 = C_5$ ,  $C_3 = C_9$ ,  $C_4 = C_{13}$ ,  $C_7 = C_{10}$ ,  $C_8 = C_{14}$ ,  $C_{12} = C_{15}$ , où  $C_n$  représente la  $n^{\text{me}}$  colonne de  $\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}}$ . Ainsi, la dimension du noyau de  $\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}}$  est égale à 6 :  $\dim \left[ \ker \left( \tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}} \right) \right] = 6$ . Une base  $B_{\ker}$  du noyau peut être définie comme :*

$$\begin{aligned} B_{\ker} &= \{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4, e'_5, e'_6\} \\ &= \{e_2 - e_5, e_3 - e_9, e_4 - e_{13}, e_7 - e_{10}, e_8 - e_{14}, e_{12} - e_{15}\} \end{aligned}$$

où les  $e_i$ ,  $i \in \{1, \dots, 16\}$  sont les vecteurs de la base canonique  $\mathbb{R}^{16}$ .

Les  $e'_i$  sont linéairement indépendants et vérifient :  $(\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}}) e'_i = 0$ , ainsi les  $e'_i$  sont bien dans le noyau de  $\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}}$ .

Grâce au théorème du rang :

$$\text{rang} \left( \tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}} \right) + \dim \left( \ker \left( \tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}} \right) \right) = \dim(\mathbb{R}^{16}),$$

et puisque la dimension de  $\ker \left( \tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}} \right)$  est égale à 6, la dimension de l'image de  $\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}}$  est égale à 10.

On définit alors une base  $B_{\text{im}}$  de l'image :

$$\begin{aligned} B_{\text{im}} &= \{e''_1, e''_2, e''_3, e''_4, e''_5, e''_6, e''_7, e''_8, e''_9, e''_{10}\} \\ &= \{e_1, e_6, e_{11}, e_{16}, e_2 + e_5, e_3 + e_9, e_4 + e_{13}, e_7 + e_{10}, e_8 + e_{14}, e_{12} + e_{15}\} \end{aligned}$$

Les  $e''_i$  sont linéairement indépendants et vérifient l'inégalité suivante

$(\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}}) e''_i \neq 0$ , nous vérifions alors la propriété : les vecteurs  $e'_i$  et  $e''_i$  sont linéairement indépendants, et ainsi  $\{e'_1, \dots, e'_6, e''_1, \dots, e''_{10}\}$  est une base de  $\mathbb{R}^{16}$ .

Maintenant que nous avons les bases du noyau et de l'image de  $\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}}$ , nous allons prouver que les vecteurs du noyau ne peuvent pas résoudre notre problème d'optimisation.

**Propriété 4.2.2** *Dans le noyau de  $\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}}$ , seul le vecteur  $0_{\mathbb{R}^{16}}$  possède une structure de Kronecker.*

Cette propriété est démontrée dans l'annexe D.

Finalement, les vecteurs  $\mathbf{d}_l$ , différents du vecteur nul et vérifiant la contrainte d'optimisation ne sont pas dans le noyau de  $\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}}$ , mais sont dans l'image de  $\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}}$  d'après la propriété .

**Propriété 4.2.3** *Soit  $E$ , l'ensemble des vecteurs dans  $\mathbb{R}^{16}$  ayant une structure de Kronecker :  $E = \{\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{16} / \mathcal{P} = \mathcal{J} \otimes \mathcal{J}, \mathcal{J} \in \mathbb{R}^4\}$  alors  $E \subset \left( \text{Image} \left( \tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}} \right) \cup \{0\} \right)$ .*

Pour résumer, nous avons prouvé que les vecteurs  $\mathbf{d}_l$  non nuls,  $\forall l \in \{1, 2\}$  qui minimisent la fonction  $\sum_{l=1}^{N_t} \mathbf{d}_l^T (\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}}) \mathbf{d}_l$  sous les hypothèses  $\mathbf{d}_l = \mathbf{t}_l \otimes \mathbf{t}_l$  et  $\|\mathbf{d}_l\| = R$  sont dans l'image de  $\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}}$ , c.f. propriété 4.2.2 et lemme 4.2.3.

De plus, le critère à minimiser devient, en utilisant la propriété 4.2.1 et le lemme 4.2.1 :

$$\begin{cases} \min J_{AMMA}(\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_{N_t}) = \mathbf{d}_l^T (\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}}) \mathbf{d}_l, \forall l \in \{1 \dots N_t\} \\ \text{sous } \mathbf{d}_l = \mathbf{t}_l \otimes \mathbf{t}_l, \|\mathbf{d}_l\| = R \end{cases}$$

Les vecteurs  $\mathbf{d}_l$  qui minimisent  $\mathbf{d}_l^T (\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}}) \mathbf{d}_l$  sont les vecteurs propres de  $\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}}$  associés aux plus faibles valeurs propres non nulles. Cependant, ces vecteurs n'ont pas forcément une structure de Kronecker. Nous allons voir dans le paragraphe suivant comment obtenir les vecteurs solution  $\mathbf{t}_l$ .

### 4.3 L'AMMA par blocs

Afin d'obtenir les vecteurs  $\mathbf{t}_l$ , nous cherchons, comme Van Der Veen [VLLS05], une matrice de passage  $\mathbf{\Lambda}$  de dimension  $N_t \times N_t$ , de rang plein, telle que :

$$\hat{\mathbf{T}} = \arg \min \|\mathbf{D} - (\mathbf{T} \circ \mathbf{T})\mathbf{\Lambda}\|_F^2$$

avec  $\mathbf{T} = (\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_{N_t})$  et  $\mathbf{D} = (\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{N_t})$ . En utilisant la propriété 4.3 du produit de Kronecker, ce problème de minimisation peut être reformulé de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{D} - (\mathbf{T} \circ \mathbf{T})\mathbf{\Lambda}\|_F^2 &= \sum_{n=1}^{N_t} \|\mathbf{d}_n - (\mathbf{T} \circ \mathbf{T})\boldsymbol{\lambda}_n\|_F^2 \\ &= \sum_{n=1}^{N_t} \|\mathbf{D}_n - \mathbf{T}\mathbf{\Lambda}_n\mathbf{T}^T\|_F^2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

avec  $\boldsymbol{\lambda}_n$  le  $n^e$  vecteur de la matrice  $\mathbf{\Lambda}$ ,  $\mathbf{\Lambda}_n = \text{diag}(\boldsymbol{\lambda}_n)$  est une matrice diagonale et  $\mathbf{D}_n = \text{vec}(\mathbf{d}_n)$ . Nous rappelons que la matrice  $\mathbf{T}$  est de dimension  $2N_t \times N_t$ . Nous pouvons noter que si la matrice  $\mathbf{T}$  était carrée, la minimisation de l'équation 4.8 serait équivalente à une diagonalisation jointe. Pour obtenir la matrice  $\mathbf{T}$ , nous supposons dans un premier temps qu'elle est carrée. Ainsi, à l'aide d'une diagonalisation jointe des matrices  $\mathbf{D}_n$ , nous obtenons une matrice  $\mathbf{T}'$  de dimension  $2N_t \times 2N_t$ . Cette dernière est réalisée grâce à l'algorithme décrit dans [CS96]. Les colonnes de cette dernière étant liées, nous obtenons la matrice  $\mathbf{T}$  de dimension  $2N_t \times N_t$  en extrayant les colonnes de  $\mathbf{T}'$  linéairement indépendantes.

### 4.4 L'AMMA adaptatif

On cherche toujours à minimiser la fonction de coût  $J_{AMMA}$  mais de manière adaptative. Ainsi, la fonction de coût devient :

$$\begin{cases} \min J_{AMMA}(\mathbf{t}_l) = \mathbf{d}_l^T(k) (\tilde{\mathbf{C}}(k) + \bar{\mathbf{C}}(k)) \mathbf{d}_l(k), \forall l \in \{1 \dots N_t\} \\ \text{sous } \mathbf{d}_l(k) = \mathbf{t}_l(k) \otimes \mathbf{t}_l(k), \|\mathbf{d}_l(k)\| = R \end{cases}$$

Pour cela, nous devons dans un premier temps estimer les matrices  $\tilde{\mathbf{C}}(k)$  et  $\bar{\mathbf{C}}(k)$  itérativement. Nous utilisons la méthode utilisée par Van der Veen [VDV05] :

$$\tilde{\mathbf{C}}(k) = \lambda \tilde{\mathbf{C}}(k-1) + \beta(k) \tilde{\mathbf{c}}(k) \tilde{\mathbf{c}}^T(k) = f(\tilde{\mathbf{C}}(k-1), \tilde{\mathbf{c}}(k)) \quad (4.9)$$

$$\bar{\mathbf{C}}(k) = \lambda \bar{\mathbf{C}}(k-1) + \beta(k) \bar{\mathbf{c}}(k) \bar{\mathbf{c}}^T(k) = f(\bar{\mathbf{C}}(k-1), \bar{\mathbf{c}}(k)) \quad (4.10)$$

Ainsi,  $\tilde{\mathbf{C}}(k)$  et  $\bar{\mathbf{C}}(k)$  sont respectivement les estimées des matrices d'autocorrélation des signaux  $\tilde{\mathbf{c}}(k)$  et  $\bar{\mathbf{c}}(k)$ , avec  $0 < \lambda < 1$ ,  $\beta(k) = \frac{\alpha(k-1)}{\alpha(k)} \lambda(1-\lambda)$ ,  $\alpha(k) = \lambda\alpha(k-1) + 1 - \lambda$  et :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{c}}(k) &= \underline{\tilde{\mathbf{y}}}(k) \otimes \underline{\tilde{\mathbf{y}}}(k) - \underline{\tilde{\mathbf{p}}}(k-1)/\alpha(k-1) \\ \bar{\mathbf{c}}(k) &= \underline{\bar{\mathbf{y}}}(k) \otimes \underline{\bar{\mathbf{y}}}(k) - \underline{\bar{\mathbf{p}}}(k-1)/\alpha(k-1) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{\mathbf{p}}}(k) &= \lambda \underline{\tilde{\mathbf{p}}}(k-1) + (1-\lambda)(\underline{\tilde{\mathbf{y}}}(k) \otimes \underline{\tilde{\mathbf{y}}}(k)) \\ \underline{\bar{\mathbf{p}}}(k) &= \lambda \underline{\bar{\mathbf{p}}}(k-1) + (1-\lambda)(\underline{\bar{\mathbf{y}}}(k) \otimes \underline{\bar{\mathbf{y}}}(k)) \end{aligned}$$

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que la solution du problème d'optimisation se trouve dans l'image de  $\tilde{\mathbf{C}}(k) + \bar{\mathbf{C}}(k)$ . Pour obtenir ces vecteurs de manière adaptative, nous utiliserons un algorithme de poursuite de sous-espace associé à une diagonalisation jointe adaptative.

#### 4.4.1 Poursuite du sous-espace

Il existe de nombreux algorithmes de poursuite de sous-espace, ces derniers sont généralement évalués par rapport à leur vitesse de convergence, leur erreur d'estimation moyenne obtenue en régime stationnaire et leur stabilité en terme d'orthogonalité. Dans [VP96], l'algorithme NOOJA<sup>(3)</sup> est utilisé, cet algorithme possède une convergence rapide mais une instabilité en terme d'orthogonalité. Cependant, il permet une bonne poursuite de sous-espace mineur dans un environnement à temps variable. Mais, l'algorithme NOOJA est stable uniquement pour des constellations 4-QAM et 4-PSK. Pour des constellations de tailles supérieures, nous nous sommes intéressés à d'autres algorithmes de poursuite de sous-espace, comme le YAST[Bad08] et le FPDMD[DM08]. Si ces algorithmes offrent des performances similaires aux algorithmes CMA et MMA pour des constellations 16-QAM, ils ne peuvent malheureusement pas être utilisés sur des canaux qui varient dans le temps. Ainsi, dans les paragraphes qui suivent nous utiliserons uniquement l'algorithme NOOJA qui permet une utilisation sur des canaux sélectifs en temps.

##### 4.4.1.1 Principe

Utilisé seul, l'algorithme NOOJA permet de poursuivre le sous-espace  $\mathbf{V}$  engendré par les vecteurs propres associés aux plus faibles valeurs propres. Mais utilisé conjointement avec la diagonalisation adaptative jointe, décrite dans le paragraphe suivant, il poursuit le sous-espace  $\mathbf{V}$  engendré par les vecteurs propres associés aux plus faibles valeurs propres différentes de 0. Par la suite nous appellerons sous-espace mineur le sous-espace  $\mathbf{V}$ . Cet

---

<sup>(3)</sup>Normalized Orthogonal Oja

algorithme extrait adaptativement le sous-espace mineur  $\mathbf{V}$  de la matrice d'autocorrélation  $\mathbf{R}$  du signal  $\mathbf{r}(k)$  en maximisant la fonction suivante :

$$\begin{aligned} J(\mathbf{V}) &= E \|\mathbf{r}(k) - \mathbf{V}\mathbf{V}^T \mathbf{r}(k)\|^2 \\ &= \text{tr}(\mathbf{R}) - 2\text{tr}(\mathbf{V}^T \mathbf{R} \mathbf{V}) + \text{tr}(\mathbf{V}^T \mathbf{R} \mathbf{V} \mathbf{V}^T \mathbf{V}) \end{aligned}$$

#### 4.4.1.2 Adaptation de NOOJA à notre problème

Dans ce problème, le sous-espace mineur de  $\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}}$  est recherché. Ainsi, puisque la matrice  $\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}}$  n'est pas bilinéaire, elle ne peut pas s'écrire sous la forme  $\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}} = E[\mathbf{c}\mathbf{c}^T]$ . Nous proposons donc de rechercher le sous-espace mineur commun aux deux matrices  $\tilde{\mathbf{C}}$  et  $\bar{\mathbf{C}}$ . La matrice  $\bar{\mathbf{C}}$  s'exprimant comme :

$$\bar{\mathbf{C}} = (\mathbf{\Gamma} \otimes \mathbf{\Gamma}) \tilde{\mathbf{C}} (\mathbf{\Gamma} \otimes \mathbf{\Gamma})^{-1}$$

nous en concluons que  $\tilde{\mathbf{C}}$  et  $\bar{\mathbf{C}}$  sont similaires et ont ainsi le même sous-espace image. Pour trouver le sous-espace mineur  $\mathbf{D} = (\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{N_t})$  engendré par les vecteurs propres associés aux plus faibles valeurs propres différentes de zéro de  $\tilde{\mathbf{C}}$  et  $\bar{\mathbf{C}}$ , nous proposons de maximiser la fonction de coût suivante :

$$\begin{aligned} J(\mathbf{D}) &= E \|\tilde{\mathbf{c}}(k) - \mathbf{D}\mathbf{D}^T \tilde{\mathbf{c}}(k)\|^2 + E \|\bar{\mathbf{c}}(k) - \mathbf{D}\mathbf{D}^T \bar{\mathbf{c}}(k)\|^2 \\ &= \text{tr}(\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}}) - 2\text{tr}(\mathbf{D}^T (\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}}) \mathbf{D}) + \text{tr}(\mathbf{D}^T (\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}}) \mathbf{D} \mathbf{D}^T \mathbf{D}) \end{aligned}$$

#### L'algorithme ASCMA adaptatif

Puisque les matrices  $\tilde{\mathbf{C}}$  et  $\bar{\mathbf{C}}$  ont la même image, le premier terme de la fonction de coût est suffisant. En utilisant uniquement la matrice  $\tilde{\mathbf{C}}$ , nous nous ramenons alors à minimiser la fonction de coût Simplified CM [IG07]. Cette simplification permet de réduire la complexité de l'algorithme AMMA adaptatif, nous l'appellerons par la suite ASCMA adaptatif pour "Analytical Simplified-CMA".

La maximisation de ce critère peut être obtenue à l'aide d'une technique de descente de gradient :

$$\mathbf{D}(k+1) = \mathbf{D}(k) - \beta \nabla J(k) \quad (4.11)$$

où

$$\nabla J = \left( -2(\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}}) + (\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}}) \mathbf{D} \mathbf{D}^T + \mathbf{D} \mathbf{D}^T (\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}}) \right) \mathbf{D}$$

En utilisant la propriété d'orthogonalité de  $\mathbf{D}(k)$  :  $\mathbf{D}^T(k) \mathbf{D}(k) = \mathbf{I}$ , la fonction de coût peut alors être simplifiée de la manière suivante :

$$J(\mathbf{D}) = \text{tr}(\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}}) - \text{tr}(\mathbf{D}^T (\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}}) \mathbf{D}) \quad (4.12)$$

En substituant  $\mathbf{D}$  dans 4.12 par 4.11, puis en effectuant le gradient de  $J(\mathbf{D}(k+1))$ , le pas optimal  $\beta_{opt}(k)$  est donné par :

$$\beta_{opt}(k) = \frac{\text{tr} \left( \mathbf{D}^T(k) (\tilde{\mathbf{C}}(k) + \bar{\mathbf{C}}(k)) \nabla J(k) \right)}{\text{tr} \left( \nabla J^T(k) (\tilde{\mathbf{C}}(k) + \bar{\mathbf{C}}(k)) \nabla J(k) \right)}$$



En gardant en mémoire que  $\mathbf{D}(k)$  est orthogonale à chaque itération et en remplaçant  $\tilde{\mathbf{C}}(k)$  et  $\bar{\mathbf{C}}(k)$  par les estimées  $\tilde{\mathbf{c}}(k)\tilde{\mathbf{c}}^T(k)$  et  $\bar{\mathbf{c}}(k)\bar{\mathbf{c}}^T(k)$  respectivement, on obtient :

$$\nabla J(k) = \tilde{\mathbf{p}}(k)\tilde{\mathbf{z}}^T(k) + \bar{\mathbf{p}}(k)\bar{\mathbf{z}}^T(k)$$

où  $\tilde{\mathbf{z}}(k) = \mathbf{D}^T(k)\tilde{\mathbf{c}}(k)$ ,  $\bar{\mathbf{z}}(k) = \mathbf{D}^T(k)\bar{\mathbf{c}}(k)$ ,  $\tilde{\mathbf{p}}(k) = \tilde{\mathbf{z}}(k) - \mathbf{D}(k)\tilde{\mathbf{z}}(k)$  et  $\bar{\mathbf{p}}(k) = \bar{\mathbf{z}}(k) - \mathbf{D}(k)\bar{\mathbf{z}}(k)$ . Le pas optimal devient alors :

$$\beta_{opt} = \frac{\left(\|\tilde{\mathbf{c}}\|^2 - \|\tilde{\mathbf{z}}\|^2\right)\|\tilde{\mathbf{z}}\|^2 + \left(\|\bar{\mathbf{c}}\|^2 - \|\bar{\mathbf{z}}\|^2\right)\|\bar{\mathbf{z}}\|^2}{\left(\|\tilde{\mathbf{c}}\|^2 - \|\tilde{\mathbf{z}}\|^2\right)^2\|\tilde{\mathbf{z}}\|^2 + \left(\|\bar{\mathbf{c}}\|^2 - \|\bar{\mathbf{z}}\|^2\right)^2\|\bar{\mathbf{z}}\|^2} \quad (4.13)$$

La mise à jour de  $\mathbf{D}(k+1)$  est obtenue grâce à une orthogonalisation de Gram-Schmidt de  $\mathbf{D}'(k+1)$ . L'algorithme obtenu est décrit sur la figure 4.1. Une fois les vecteurs minimisant

**Initialisation  $\mathbf{D}(0)$**   
**for**  $k = 1, 2, \dots$   
 $\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{D}^T(k)\tilde{\mathbf{c}}, \bar{\mathbf{z}} = \mathbf{D}^T(k)\bar{\mathbf{c}}, \tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{z}} - \mathbf{D}(k)\tilde{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{z}} - \mathbf{D}(k)\bar{\mathbf{z}}$   
 Calcul de  $\beta_{opt}$  en utilisant (4.13)  
 $\mathbf{D}'(k+1) = \mathbf{D}(k) - \beta_{opt}(\tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{z}}^T + \bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{z}}^T)$   
 $\mathbf{d}_1(k+1) = \mathbf{d}'_1(k+1)/\|\mathbf{d}'_1(k+1)\|$   
**for**  $q = 2$  to  $N_t$   
 $\mathbf{s} = [0 \dots 0]^T$   
**for**  $l = 1$  to  $q-1$   
 $\mathbf{s} = \mathbf{s} + (\mathbf{d}'_l(k+1)\mathbf{d}'_l(k+1))\mathbf{d}_l(k+1)$   
**end for**  
 $\mathbf{d}_q(k+1) = (\mathbf{d}'_q(k+1) - \mathbf{s})/\|(\mathbf{d}'_q(k+1) - \mathbf{s})\|$   
**end for**  
**end for**

FIG. 4.1 – Poursuite du sous-espace mineur de  $\tilde{\mathbf{C}}$  et  $\bar{\mathbf{C}}$

$\mathbf{d}_l^T(\tilde{\mathbf{C}}(k) + \bar{\mathbf{C}}(k))\mathbf{d}_l$  obtenus, la contrainte  $\mathbf{d}_l = \mathbf{t}_l \otimes \mathbf{t}_l$  doit être satisfaite. En d'autres termes,  $\mathbf{d}_l$  doit avoir une structure de Kronecker et doit être dans l'image de  $\tilde{\mathbf{C}}(k) + \bar{\mathbf{C}}(k)$ .

#### 4.4.2 Mise à jour de $\mathbf{t}_l$

La méthode utilisée pour satisfaire la contrainte  $\mathbf{d}_l = \mathbf{t}_l \otimes \mathbf{t}_l$  est la même que celle utilisée dans [VDV05]. Dans un premier temps, la matrice  $\mathbf{T} \circ \mathbf{T}$  est calculée et considérée comme une estimée de la base du sous-espace mineur ( $\mathbf{D} = \mathbf{T} \circ \mathbf{T}$ ). En utilisant cette base, le sous-espace est mis à jour en utilisant l'algorithme NOOJA. La dernière étape consiste à ranger les vecteurs  $\mathbf{d}_l$  dans une matrice  $\mathbf{D}_l$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_l &= \mathbf{t}_l \otimes \mathbf{t}_l = \text{vec}(\mathbf{t}_l \mathbf{t}_l^T) \\ \text{vec}^{-1}(\mathbf{d}_l) &= \mathbf{D}_l = \mathbf{t}_l \mathbf{t}_l^T \end{aligned}$$

On obtient ensuite  $\mathbf{t}_l$  par :

$$\mathbf{t}_l(k+1) = \mathbf{D}_l \mathbf{t}_l(k)$$

### 4.4.3 Estimation des symboles

Pour obtenir les symboles transmis, la matrice complexe  $\mathbf{W}$  est obtenue à partir de la matrice réelle  $\mathbf{T}$  :

$$\mathbf{w}_{lm} = \mathbf{t}_{lm} + j\mathbf{t}_{l(m+N_t)}, \quad l, m \in 1, \dots, N_t$$

Pour éviter l'extraction de la même source plusieurs fois,  $\mathbf{W}$  est reconditionnée à chaque itération. La technique utilisée est basée sur une décomposition de  $\mathbf{W}$  en valeurs singulières :  $\mathbf{W} = \sum_j \sigma_j \mathbf{u}_j \mathbf{v}_j^H$ , ensuite les valeurs singulières de  $\mathbf{W}$  qui sont inférieures à 0,5 sont remplacées par 1 :

$$\text{recond}(\mathbf{W}) = \sum_j \sigma'_j \mathbf{u}_j \mathbf{v}_j^H$$

La matrice  $\mathbf{W}$  résultante est appliquée aux signaux reçus pré-blanchis :

$$\hat{\mathbf{s}}(k) = \mathbf{W}^H(k) \underline{\mathbf{y}}(k)$$

L'algorithme AMMA adaptatif est décrit sur la figure 4.2.

```

Initialisation  $\mathbf{F}, \mathbf{T}, \bar{\mathbf{p}} = 0, \bar{\mathbf{p}} = 0, \alpha = 0$ 
for  $k = 1, 2, \dots$ 
    Mise à jour de  $\mathbf{F}$ , le filtre de blanchiment ,
    en utilisant  $y(k)$  et [DH97] nous obtenons  $\underline{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{F}^H \mathbf{y}(k)$ 
    Mise à jour des vecteurs réels
 $\tilde{\mathbf{y}}(k) = \begin{pmatrix} \Re(\mathbf{y}(k)) \\ \Im(\mathbf{y}(k)) \end{pmatrix}, \bar{\mathbf{y}}(k) = \begin{pmatrix} -\Im(\mathbf{y}(k)) \\ \Re(\mathbf{y}(k)) \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{w}}_l = \begin{pmatrix} \Re(\mathbf{w}) \\ \Im(\mathbf{w}) \end{pmatrix}$ 
    Mise à jour des vecteurs  $\tilde{\mathbf{c}}$  et  $\bar{\mathbf{c}}$ 
 $\tilde{\mathbf{c}} = \tilde{\mathbf{y}}(k) \otimes \tilde{\mathbf{y}}(k) - \tilde{\mathbf{p}}/\alpha, \bar{\mathbf{c}} = \bar{\mathbf{y}}(k) \otimes \bar{\mathbf{y}}(k) - \bar{\mathbf{p}}/\alpha$ 
 $\tilde{\mathbf{p}} = \lambda \tilde{\mathbf{p}} + (1 - \lambda)(\tilde{\mathbf{y}}(k) \otimes \tilde{\mathbf{y}}(k)), \bar{\mathbf{p}} = \lambda \bar{\mathbf{p}} + (1 - \lambda)(\bar{\mathbf{y}}(k) \otimes \bar{\mathbf{y}}(k))$ 
 $\alpha = \lambda \alpha + 1 - \lambda$ 
     $\mathbf{D} = \mathbf{T} \circ \mathbf{T}$ 
    Considérer  $\mathbf{D}$  comme une base du sous-espace mineur de  $\tilde{\mathbf{C}}$  et  $\bar{\mathbf{C}}$ ,
    et le mettre à jour en utilisant  $\tilde{\mathbf{c}}$  et  $\bar{\mathbf{c}}$  (figure 4.1)
    for  $l = 1, \dots, N_t$ 
         $\mathbf{D}_l = \text{vec}^{-1}(\mathbf{d}_l), \mathbf{t}_l = \mathbf{D}_l \mathbf{t}_l, \mathbf{t}_l = \mathbf{t}_l / \|\mathbf{t}_l\|$ 
        Obtenir la matrice  $N_t \times N_t$  complexe  $\mathbf{W}(k)$ 
        for  $m = 1, \dots, 2N_t$ 
             $\mathbf{w}_{lm} = \mathbf{t}_{lm} + j\mathbf{t}_{l(m+N_t)}$ 
        end for
    end for
     $\mathbf{W} = \text{recond}(\mathbf{W}), \mathbf{T} = (\Re(\mathbf{W}) \ \Im(\mathbf{W}))^T$ 
    Estimer les sources
 $\hat{\mathbf{s}}(k) = \mathbf{W}^H(k) \underline{\mathbf{y}}(k)$ 
end for

```

FIG. 4.2 – Adaptive Algebraic-MMA

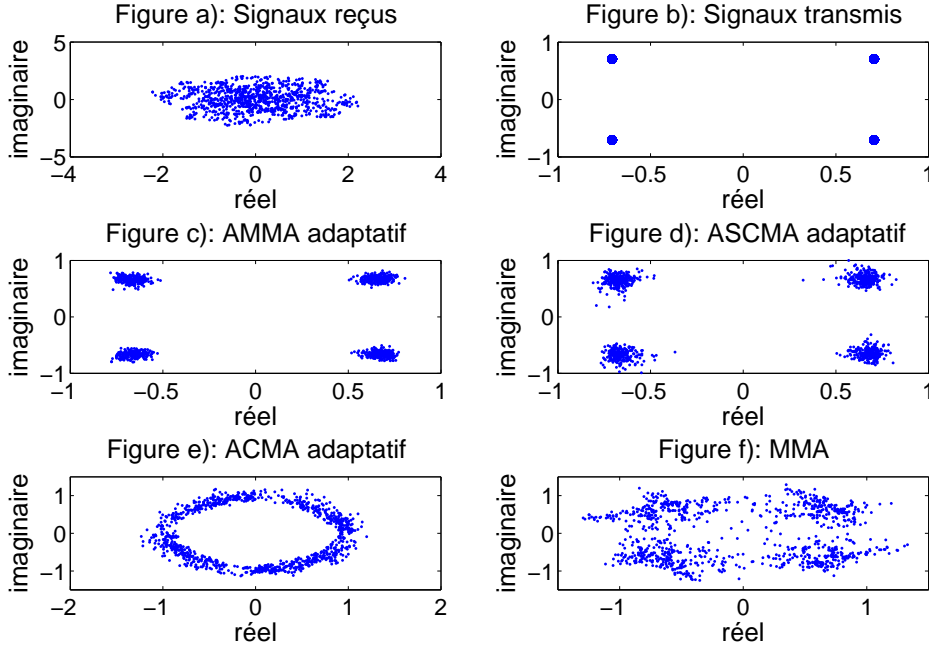


FIG. 4.3 – Constellations obtenues avec un décalage en fréquence .  $SNR = 30dB$ ,  $N_t = 2$ ,  $N_r = 4$ ,  $\delta_f T_s = 10^{-3}$  et  $f_d T_s = 0.0011$

## 4.5 Simulations

Les simulations sont effectuées lorsque le canal varie dans le temps et est non convolutif. Les coefficients des sous-canaux MIMO sont obtenus à l'aide des fonctions Matlab "Ricianchan" et "Rayleighchan". Ces dernières génèrent les coefficients des sous-canaux d'après le modèle de Jakes [Jak74]. Le taux Doppler  $f_d T_s$  est choisi pour toutes les simulations égal à  $1, 1 \cdot 10^{-3}$ . Les symboles transmis sont issus d'une constellation 4-QAM et sont transmis à travers un canal MIMO de Rayleigh. Deux transmetteurs et quatre récepteurs sont utilisés ( $N_t = 2$  et  $N_r = 4$ ). Les performances de l'AMMA adaptatif sont comparées à celles de l'ASCMA adaptatif, de l'ACMA adaptatif et du MMA, en termes de TEB et du SINR<sup>(4)</sup>.

Nous considérons dans un premier temps le cas où un décalage en fréquence ( $\delta_f T_s = 10^{-3}$ ) est présent sur les signaux reçus. La figure 4.3 représente les constellations obtenues en sortie des différents algorithmes de séparation pour un SNR de 30 dB. Nous pouvons noter que l'ACMA adaptatif et le MMA ne permettent pas de poursuivre le décalage en fréquence. Ainsi, la constellation observée en sortie de l'ACMA "tourne" (figure 1.3e) et celle en sortie du MMA semble "bruitée" (figure 1.3f). En effet, l'algorithme MMA ne converge pas assez vite pour poursuivre le décalage en fréquence. Ainsi, seuls l'AMMA adaptatif et l'ASCMA adaptatif (figure 1.3c et d) permettent d'éliminer le décalage en

<sup>(4)</sup>Signal to Noise Interference plus Noise Ratio

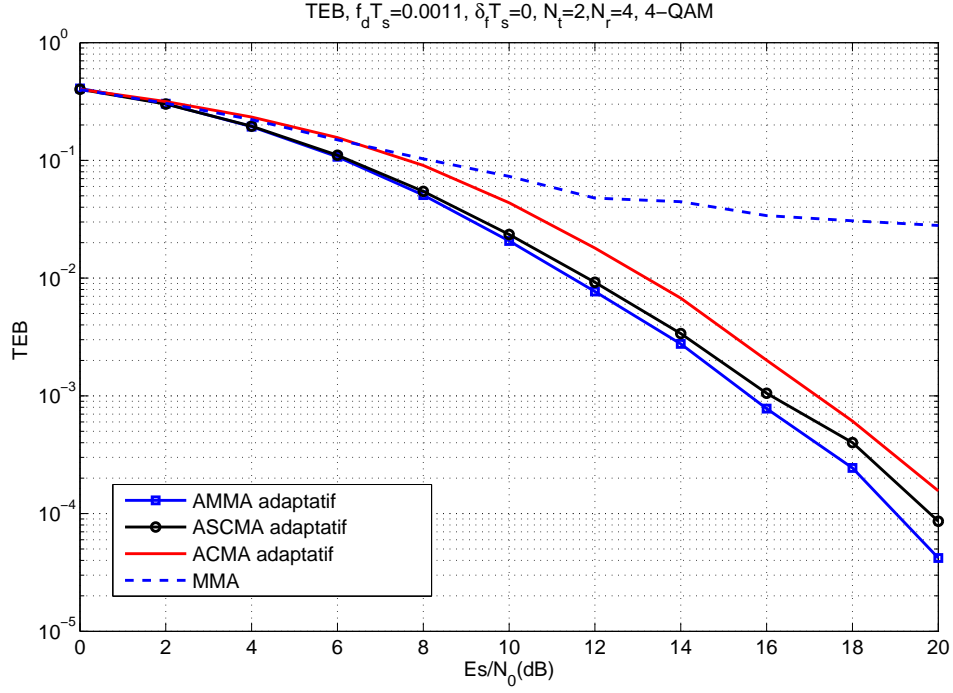


FIG. 4.4 – TEB obtenu sans décalage en fréquence en fonction du SNR.  $N_t = 2$ ,  $N_r = 4$ ,  $\delta_f T_s = 0$  et  $f_d T_s = 0.0011$

fréquence sans utiliser une boucle de synchronisation.

La figure 4.4 représente les TEB obtenu avec l'AMMA adaptatif, l'ASCMA adaptatif, l'ACMA adaptatif et le MMA. Pour tracer les TEB nous avons utilisé  $10^7$  symboles transmis sur un canal qui varie dans le temps. La simulation a été réalisée sans décalage en fréquence. Le TEB le plus faible est obtenu par l'AMMA adaptatif, suivi de l'ASCMA adaptatif, de l'ACMA adaptatif et enfin du MMA. L'algorithme MMA n'a pas le temps de converger sur ce type de canaux. Il en résulte un effet plancher sur le TEB obtenu par cet algorithme. Ainsi, l'algorithme AMMA adaptatif que nous proposons permet d'obtenir un gain de 2 dB en termes de SNR comparé à l'ACMA adaptatif pour un TEB fixé à  $10^{-3}$ . Nous pouvons finalement retenir que les TEB de l'AMMA et de l'ASCMA sont relativement proches.

Les résultats présentés sur la figures 4.5 permettent de comparer les différents algorithmes en termes de SINR. Ainsi, nous remarquons que les performances de l'AMMA adaptatif et de l'ASCMA adaptatif sont très proches en termes de SINR résiduel. De plus, ces deux algorithmes atteignent un SINR résiduel supérieur à ceux du MMA et de l'ACMA adaptatif.

La figure 4.6 représente le canal estimé par l'AMMA adaptatif. Les coefficients du canal sont obtenus en effectuant la pseudo inverse de la matrice d'égalisation  $\mathbf{W}$  estimée par

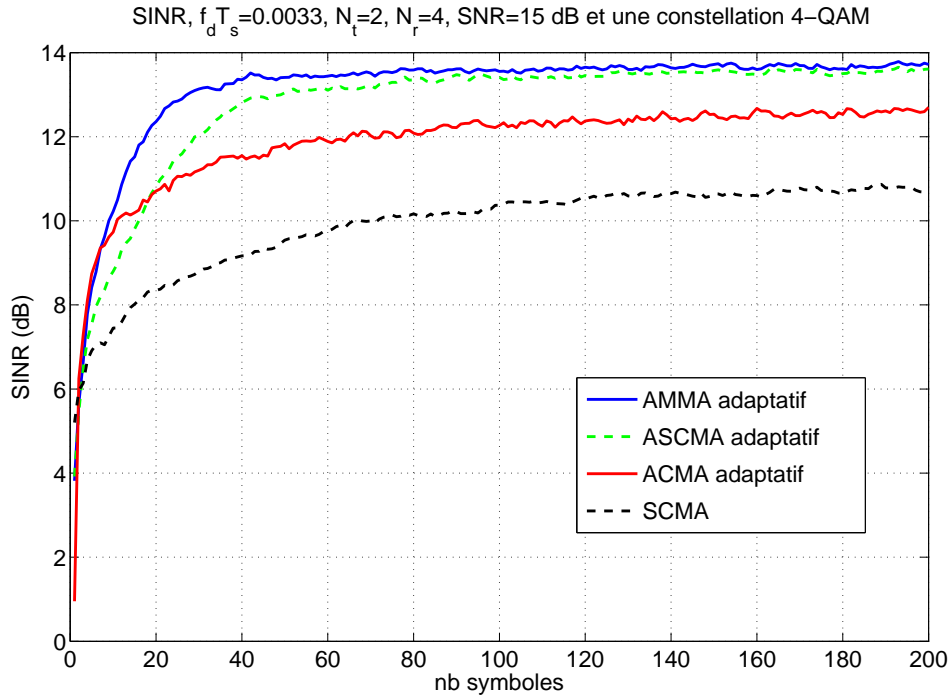


FIG. 4.5 – SINR obtenu sans décalage en fréquence en fonction du temps.  $SNR = 15dB$ ,  $N_t = 2$ ,  $N_r = 4$ ,  $\delta_f T_s = 0$  et  $f_d T_s = 0.0033$

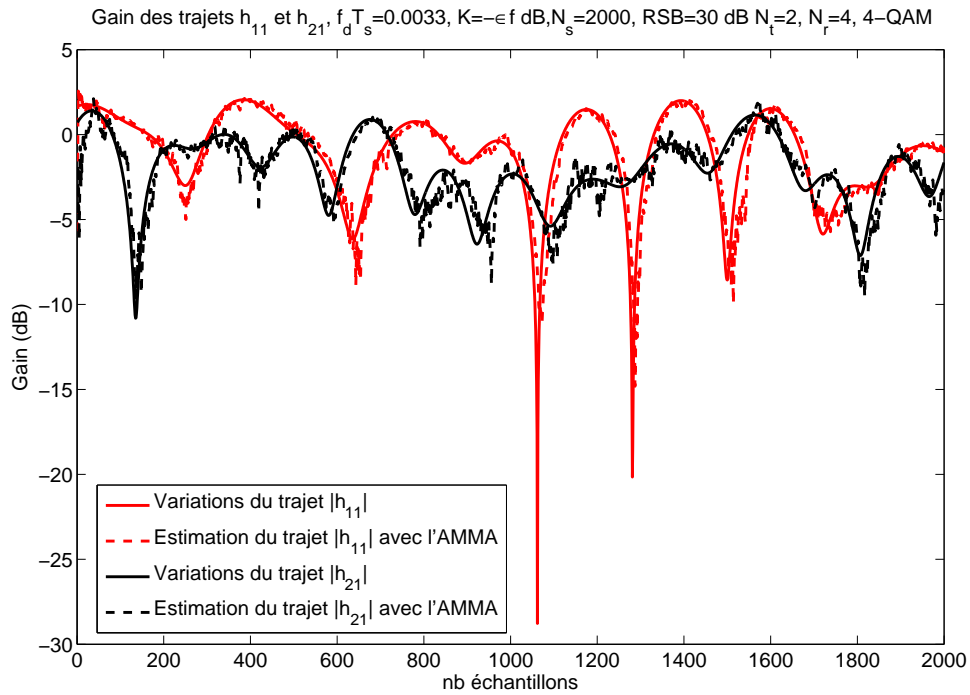


FIG. 4.6 – Gain des trajets  $h_{11}$  et  $h_{21}$  obtenus avec l'AMMA adaptatif

l'AMMA adaptatif. Nous pouvons noter que l'estimation donnée par l'AMMA adaptatif suit parfaitement les variations du canal.

## 4.6 Conclusion

L'objectif de ce chapitre était de résoudre conjointement la séparation aveugle de sources, la poursuite du résidu de phase, ainsi que d'augmenter la vitesse de convergence de la BSS. Nous avons donc proposé un nouvel algorithme de BSS et sa version simplifiée pour des environnements sélectifs en temps. Les algorithmes proposés sont appelés respectivement AMMA adaptatif et ASCMA adaptatif. D'autre part, après une étude théorique, nous avons montré dans quel sous-espace se trouve la solution de nos problèmes d'optimisation. Ces algorithmes permettent de réaliser la séparation aveugle conjointement à la synchronisation de phase contrairement à l'algorithme ACMA. De plus, les résultats de simulation montrent que les algorithmes AMMA et ASCMA adaptatifs atteignent de meilleures performances en termes de SINR et TEB comparés aux algorithmes ACMA adaptatif, MMA et SCMA lorsque le canal varie dans le temps.



## Chapitre 5

# Association filtre de Kalman et BSS

Le chapitre 2 a permis de faire ressortir la lenteur de convergence des algorithmes à gradient stochastique (CMA, MMA et MUK). Ces derniers ne peuvent donc pas être utilisés sur des canaux variant rapidement dans le temps. Le chapitre 4 a proposé une première solution à cet inconvénient. Dans ce chapitre, nous proposons une seconde solution basée sur une autre approche pour obtenir les symboles transmis. Cette dernière repose sur une estimation de canal réalisée par un filtre de Kalman associé à un égaliseur de type ZF, MMSE ou OSIC. En effet, ce filtre offre de bonnes performances en termes de poursuite. Cependant, il doit être initialisé par des séquences d'apprentissage habituellement utilisées dans les systèmes coopératifs. En effet, la littérature sur la poursuite de canaux MIMO considère uniquement les contextes coopératifs ou semi-aveugles [EK02, ESK02, KFSW02]. Pour pouvoir utiliser le filtre de Kalman dans des systèmes d'interception, nous proposons une méthode pour l'initialiser de manière aveugle.

L'apport de nos travaux réside dans l'association d'une séparation aveugle de sources et du filtre de Kalman afin de pouvoir poursuivre des canaux MIMO sélectifs en temps dans un contexte d'interception. Utilisés séparément, ces deux algorithmes ne peuvent pas fonctionner correctement dans un tel contexte mais en les associant, les avantages de l'un annulent les inconvénients de l'autre et réciproquement. Ainsi, la séparation aveugle de sources est utilisée pour estimer les premiers symboles transmis afin de les utiliser comme séquence d'apprentissage pour initialiser le filtre de Kalman.

Dans un premier temps nous présenterons le principe du filtre de Kalman utilisé pour poursuivre des canaux MIMO. Puis, nous présenterons le principe de l'association BSS et filtre de Kalman à l'aide de simulations où nous comparerons les performances obtenues avec celles d'un filtre initialisé par de vraies séquences d'apprentissage. Finalement, nous comparerons les résultats obtenus par le filtre de Kalman initialisé de manière aveugle avec l'AMMA adaptatif décrit au chapitre 4.

### 5.1 Modèle du signal

#### 5.1.1 Modélisation de la transmission

En considérant un canal de transmission non-convolutif et variant dans le temps, nous sommes amenés à considérer le modèle de transmission théorique suivant :

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{H}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}(k)$$



avec

- $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_{11} & \dots & h_{1N_t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N_r 1} & \dots & h_{N_r N_t} \end{pmatrix}$  la matrice  $N_r \times N_t$  de transmission,
- $\mathbf{y} = (y_1 \dots y_{N_r})^T$  les  $N_r$  signaux reçus,
- $\mathbf{x} = (x_1 \dots x_{N_t})^T$  le vecteur des  $N_t$  signaux transmis résultant d'un éventuel codage MIMO des symboles non codés  $s(k)$ ,
- $\mathbf{b} = (b_1 \dots b_{N_r})^T$  le vecteur de bruit additif.

Nous cherchons à estimer les symboles transmis  $\mathbf{s}(k)$ , pour cela un filtre de Kalman estimant le canal de transmission  $\mathbf{H}(k)$  est utilisé puis un égaliseur décrit au chapitre 1 permet d'estimer les symboles  $\mathbf{s}(k)$  à partir de l'estimée  $\hat{\mathbf{H}}(k)$  fournie par le filtre de Kalman et à partir des observations.

### 5.1.2 Modélisation des variations du canal

Le filtre de Kalman utilisé dans notre contexte utilise une approximation des variations du canal MIMO  $\mathbf{h}(k) = \text{vec}(\mathbf{H}(k))$  grâce à un processus AR<sup>(1)</sup> d'ordre  $p$  :

$$\mathbf{h}(k) = \sum_{l=1}^p \mathbf{F}(l)\mathbf{h}(k-l) + \mathbf{A}\mathbf{n}(k)$$

où  $\mathbf{n}(k)$  est un vecteur de bruit  $N_r N_t \times 1$  gaussien circulaire, i.i.d., de moyenne nulle et de matrice de corrélation :  $\mathbf{R}_n = \mathbf{I}$ . Puisque les sous-canaux SISO du canal MIMO sont supposés être non corrélés entre eux et stationnaires au sens large, les matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{F}(l)$  sont diagonales. Pour définir leurs diagonales, le modèle AR d'ordre 1 du canal est généralement utilisé pour plus de simplicité. Ainsi :

$$\mathbf{h}(k) = \mathbf{F}\mathbf{h}(k-1) + \mathbf{A}\mathbf{n}(k)$$

En supposant que la matrice de corrélation de  $\mathbf{h}(k)$  est unitaire, on observe que :

$$E [\mathbf{h}(k)\mathbf{h}^H(k+1)] = \mathbf{F}^H$$

Or, selon le modèle de Jakes [Jak74] les sous-canaux SISO vérifient :

$E [h_m(k)h_m^H(k+1)] = J_0(2\pi f_d^{(m)}T_s)$ , où  $J_0$  représente la fonction de Bessel d'ordre zéro de première espèce et  $f_d^{(m)}$  la fréquence Doppler du  $m^e$  sous canal SISO et  $T_s$  le temps symbole. Ainsi, les coefficients de la diagonale de  $\mathbf{F}$  valent  $f_m = J_0(2\pi f_d^{(m)}T_s)$  et en supposant que la fréquence Doppler est la même pour tous les sous-canaux SISO, tous les coefficients de la diagonale de  $\mathbf{F}$  sont égaux à  $f = f_m = J_0(2\pi f_d T_s)$ .

Maintenant que le taux de variation du canal est fixé via  $\mathbf{F}$ , l'amplitude, pour tout  $m$ , du  $m^e$  sous canal SISO est contrôlée par les coefficients de la matrice  $\mathbf{A}$ . En utilisant les propriétés de  $\mathbf{n}(k)$  et de  $\mathbf{h}(k)$ , i.e. leurs matrices de corrélation sont unitaires, on obtient :

$$\mathbf{A} = \sqrt{1 - f^2}\mathbf{I}$$

---

<sup>(1)</sup>Auto Régressif

## 5.2 Le filtre de Kalman

Le filtre de Kalman est un estimateur récursif, pour estimer l'état courant  $\mathbf{h}(k)$ , seul l'état précédent  $\mathbf{h}(k-1)$  et les mesures actuelles sont nécessaires. L'état du filtre est représenté par deux variables :  $\hat{\mathbf{h}}(k|k)$  l'estimation de l'état à l'instant  $k$  et  $\mathbf{P}(k|k)$  la matrice de covariance de l'erreur d'estimation.

Le filtre de Kalman repose sur deux équations :

$$\begin{cases} \mathbf{h}(k) = \mathbf{F}\mathbf{h}(k-1) + \mathbf{A}\mathbf{n}(k) & \text{l'équation d'état} \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{X}'(k)\mathbf{h}(k) + \mathbf{b}(k) & \text{l'équation de mesure} \end{cases}$$

où

- $\mathbf{h}(k) = \text{vec}(\mathbf{H}(k))$  représente le vecteur d'état de dimension  $N_t N_r \times 1$
- $\mathbf{n}(k)$  et  $\mathbf{b}(k)$  sont des bruits blancs gaussiens de dimension  $N_t N_r \times 1$  et  $N_r \times 1$  et de matrice de corrélation  $\mathbf{R}_n = \mathbf{I}$  et  $\mathbf{R}_b = \sigma_b^2 \mathbf{I}$  respectivement
- $\mathbf{F}$  représente la  $N_t N_r \times N_t N_r$  matrice diagonale de transition
- $\mathbf{X}'(k) = \mathbf{I}_{N_r} \otimes (x_1(k) \dots x_{N_t}(k))$  est une matrice de dimension  $N_r \times N_t N_r$  où  $\otimes$  représente le produit de Kronecker.

On remarque que la connaissance des symboles transmis est nécessaire pour pouvoir poursuivre le canal. Pour cela nous devons utiliser un égaliseur en entrée du filtre de Kalman pour estimer les symboles transmis à l'instant  $k$  à partir de la prédiction  $\hat{\mathbf{h}}(k|k-1)$ . Ainsi, l'algorithme de la poursuite du canal à l'aide du filtre de Kalman est le suivant :

1. Étape de prédiction
  - $\hat{\mathbf{h}}(k|k-1) = \mathbf{F}\hat{\mathbf{h}}(k-1|k-1)$
  - $\mathbf{P}(k|k-1) = \mathbf{F}\mathbf{P}(k-1|k-1)\mathbf{F}^H + \mathbf{A}\mathbf{A}^H$
2. Estimation des symboles  $\mathbf{X}(k)$  à l'aide d'un égaliseur
3. Étape d'estimation
  - $\mathbf{K}(k) = \frac{\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{X}^H(k)}{\mathbf{R}_b + \mathbf{X}(k)\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{X}^H(k)}$
  - $\mathbf{e}(k) = \mathbf{y}(k) - \mathbf{X}(k)\hat{\mathbf{h}}(k|k-1)$
  - $\hat{\mathbf{h}}(k|k) = \hat{\mathbf{h}}(k|k-1) + \mathbf{K}(k)\mathbf{e}(k)$
  - $\mathbf{P}(k|k) = \mathbf{P}(k|k-1) - \mathbf{K}(k)\mathbf{X}(k)\mathbf{P}(k|k-1)$

Les symboles  $\mathbf{X}(k)$  doivent donc être estimés à chaque itération à l'aide d'un égaliseur. Lorsque les symboles  $\mathbf{X}(k)$  ne résultent pas d'un codage OSTBC, les égaliseurs classiques (ZF, MMSE, OSIC) peuvent être utilisés, sinon les symboles sont estimés à l'aide d'un décodeur propre au code utilisé (Alamouti ou Tarokh). Nous allons présenter dans le paragraphe qui suit le cas particulier du code d'Alamouti.

## 5.3 Cas particulier : les codes OSTBC

Lorsqu'un code OSTBC est utilisé à la transmission, l'estimation des symboles non-codés  $\mathbf{s}(k)$  se fait à l'aide du décodeur associé au code OSTBC. Prenons comme exemple le code d'Alamouti. Nous avons pu voir dans le chapitre 1, que le décodage s'effectue à l'aide de la matrice  $\mathbf{T}$  et du vecteur  $\mathbf{y}'(k)$  donnés par :

$$\mathbf{y}'(k) = \mathbf{T}(k)\mathbf{s}(k) + \mathbf{b}'(k)$$

où  $\mathbf{y}'(k) = \begin{pmatrix} \mathbf{y}^T(2k) & \mathbf{y}^{T*}(2k+1) \end{pmatrix}^T$  est le vecteur contenant les  $2 \times N_r$  signaux reçus à des instants consécutifs, le vecteur  $\mathbf{s}(k) = \begin{pmatrix} s(2k) & s(2k+1) \end{pmatrix}^T$  représente les deux signaux transmis non codés à l'instant  $k$ ,  $\mathbf{b}'(k)$  est le vecteur représentant le bruit additif et la matrice du pseudo canal  $\mathbf{T}$  peut être écrite sous la forme suivante :

$$\mathbf{T}(k) = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1(2k) & \mathbf{h}_2(2k) \\ \mathbf{h}_2^*(2k+1) & -\mathbf{h}_1^*(2k+1) \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

avec  $\mathbf{h}_n$  la  $n^{ime}$  colonne de la matrice  $\mathbf{H}$ .

Lorsque le canal est constant, i.e.  $\mathbf{H}(2k) = \mathbf{H}(2k+1)$ ,  $\mathbf{T}$  est alors une matrice unitaire à un facteur d'échelle près, ainsi  $\mathbf{T}^H(k)\mathbf{T}(k) = \alpha\mathbf{I}$  où

$$\alpha = \sum_{\substack{m=1,\dots,N_r \\ n=1,\dots,N_t}} |h_{mn}(2k)|^2$$

La matrice  $\mathbf{T}^H(k)$  est ensuite appliquée sur les signaux reçus  $\mathbf{y}'(k)$  donnant ainsi une estimée  $\mathbf{z}(k)$  des symboles  $\mathbf{s}(k)$  :

$$\mathbf{z}(k) = \frac{1}{\alpha} \cdot \mathbf{T}^H(k) \mathbf{y}'(k) \quad (5.2)$$

$$= \frac{1}{\alpha} \cdot \mathbf{T}^H(k) \mathbf{T}(k) \mathbf{s}(k) + \mathbf{b}''(k) \quad (5.3)$$

$$= \mathbf{s}(k) + \mathbf{b}''(k) \quad (5.4)$$

Mais dans un système variant dans le temps, le canal n'est pas constant et la matrice  $\mathbf{T}(k)$  n'est alors plus tout à fait unitaire :

$$\mathbf{T}^H(k)\mathbf{T}(k) = \begin{pmatrix} \alpha(k) & \epsilon_1(k) \\ \epsilon_2(k) & \alpha'(k) \end{pmatrix}$$

avec

$$\alpha(k) = \sum_{\substack{m=1,\dots,N_r \\ n=1,\dots,N_t}} |h_{mn}(2k)|^2$$

$$\alpha'(k) = \sum_{\substack{m=1,\dots,N_r \\ n=1,\dots,N_t}} |h_{mn}(2k+1)|^2$$

$$\epsilon_1(k) = \sum_{m=1}^{N_r} h_{m1}^*(2k)h_{m2}(2k) - \sum_{m=1}^{N_r} h_{m1}^*(2k+1)h_{m2}(2k+1)$$

$$\epsilon_2(k) = \sum_{m=1}^{N_r} h_{m2}^*(2k)h_{m1}(2k) - \sum_{m=1}^{N_r} h_{m2}^*(2k+1)h_{m1}(2k+1)$$

Nous supposons alors que le canal varie suffisamment lentement sur l'intervalle de temps  $[t, t + T_s]$ , avec  $T_s$  le temps symbole, afin de pouvoir considérer :

- $\alpha'(k) \approx \alpha(k)$
- $\epsilon_1(k) \approx \epsilon_2(k) \approx 0$

Ainsi, l'estimation de  $\mathbf{s}(k)$  est obtenue par :

$$\begin{aligned}\mathbf{z}(k) &= \frac{1}{\alpha} \cdot \mathbf{T}^H(k) \mathbf{y}'(k) \\ &= \frac{1}{\alpha} \cdot \mathbf{T}^H(k) \mathbf{T}(k) \mathbf{s}(k) + \mathbf{b}''(k) \\ &\approx \mathbf{s}(k)\end{aligned}$$

On peut noter que pour un code de Tarokh, le canal doit être supposé constant sur l'intervalle de temps  $[t, t + 7Ts]$ .

## 5.4 Initialisation du filtre de Kalman

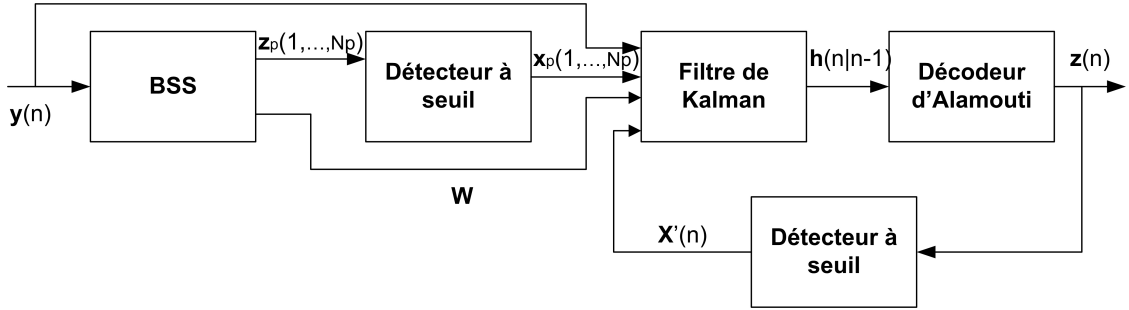


FIG. 5.1 – Schéma représentant l'association BSS-Filtre de Kalman

Dans les systèmes coopératifs, le filtre de Kalman est initialisé en utilisant des séquences d'apprentissage. En effet ces dernières permettent d'accéder directement aux premiers symboles transmis et à une estimée du canal. Dans un contexte aveugle, cette initialisation semble plus délicate puisque nous n'avons accès à aucune de ces informations. Cependant, la séparation aveugle de sources semble toute indiquée pour initialiser le filtre de Kalman puisqu'elle permet d'estimer une matrice  $\mathbf{W}$  vérifiant idéalement  $\mathbf{W}^H(k)\mathbf{H}(k) = \mathbf{I}$  et conduisant aux estimées des symboles transmis  $\hat{\mathbf{x}}(k)$  uniquement à partir des signaux reçus. Par conséquent, la BSS permet de transmettre au filtre de Kalman une estimée du canal :  $\hat{\mathbf{H}}(k) = (\mathbf{W}^H(k))^\dagger$  et des  $N_p$  premiers signaux sources. Une fois le filtre de Kalman amorcé, le vecteur  $\mathbf{h}(k-1)$  est estimé à l'itération  $k-1$  et les symboles  $\mathbf{X}'(k)$  sont obtenus en utilisant un égaliseur et  $\hat{\mathbf{H}}$  à l'instant  $k-1$ . L'association de la BSS et du filtre de Kalman est représentée sur la figure 5.1

## 5.5 Simulations

Les symboles sources résultent d'une modulation 4-QAM et d'un codage d'Alamouti et sont transmis à l'aide de 2 antennes émettrices sur un canal à évanouissements de Rice sélectif en temps. Les signaux sont ensuite réceptionnés à l'aide de 4 antennes. L'égaliseur d'Alamouti est utilisé en association avec le filtre de Kalman. Dans toutes les simulations, le Doppler, le facteur de Rice et le nombre de symboles utilisés dans la phase d'initialisation prennent les valeurs respectives  $f_d T_s = 0.0056$ ,  $K = 3dB$  et  $N_p = 10$ . Ces courbes

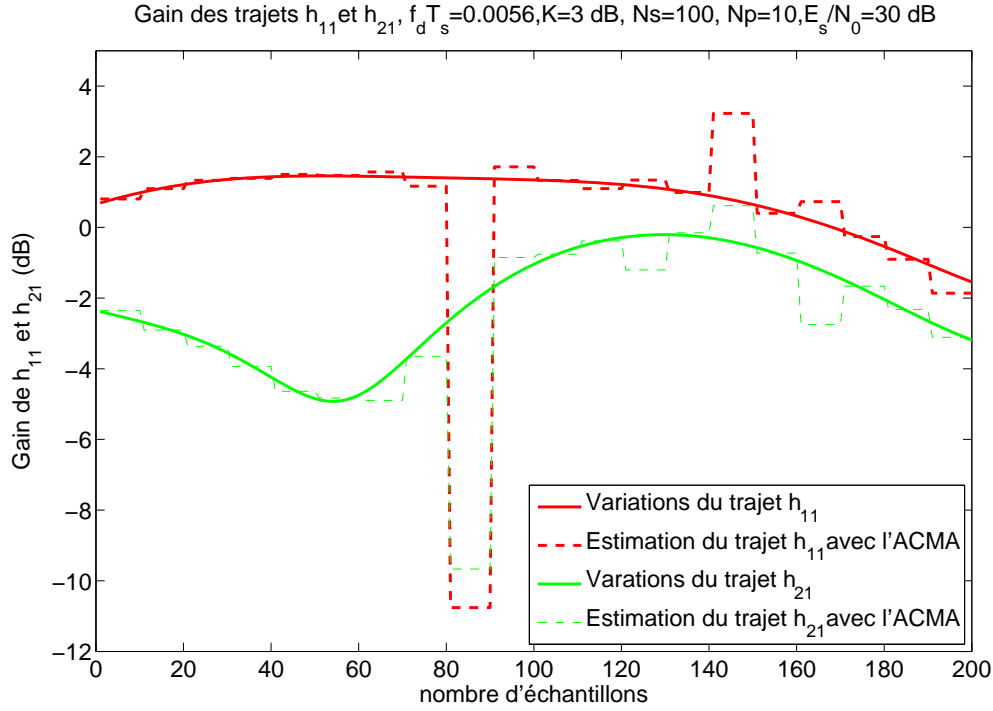


FIG. 5.2 – Estimation des trajets  $h_{11}$  et  $h_{21}$  avec l'algorithme ACMA

des TEB ont été obtenues à l'aide de  $10^5$  symboles transmis sur un canal qui varie dans le temps.

Nous allons comparer le filtre de Kalman utilisé dans un contexte aveugle, i.e initialisé par la BSS ACMA par blocs, avec un filtre de Kalman utilisé en coopératif et avec l'ACMA seul. Les performances de ces systèmes sont évaluées en termes de taux d'erreur binaire (TEB).

La figure 5.3 représente les trajets  $h_{11}$  et  $h_{21}$  du canal ainsi que leurs estimées (lignes pointillées) produites par le filtre de Kalman utilisé en aveugle. Quant à la figure 5.2, elle représente le canal estimé par l'ACMA. On remarque que le filtre de Kalman poursuit parfaitement les variations du canal alors que l'ACMA utilisé seul produit quelques blocs d'erreurs.

La figure 5.4 représente les TEB du filtre de Kalman utilisé en aveugle et celui utilisé en coopératif. Nous pouvons noter que les deux courbes se superposent parfaitement. Ainsi, le filtre de Kalman initialisé de manière aveugle permet d'obtenir d'aussi bonnes performances qu'en coopératif.

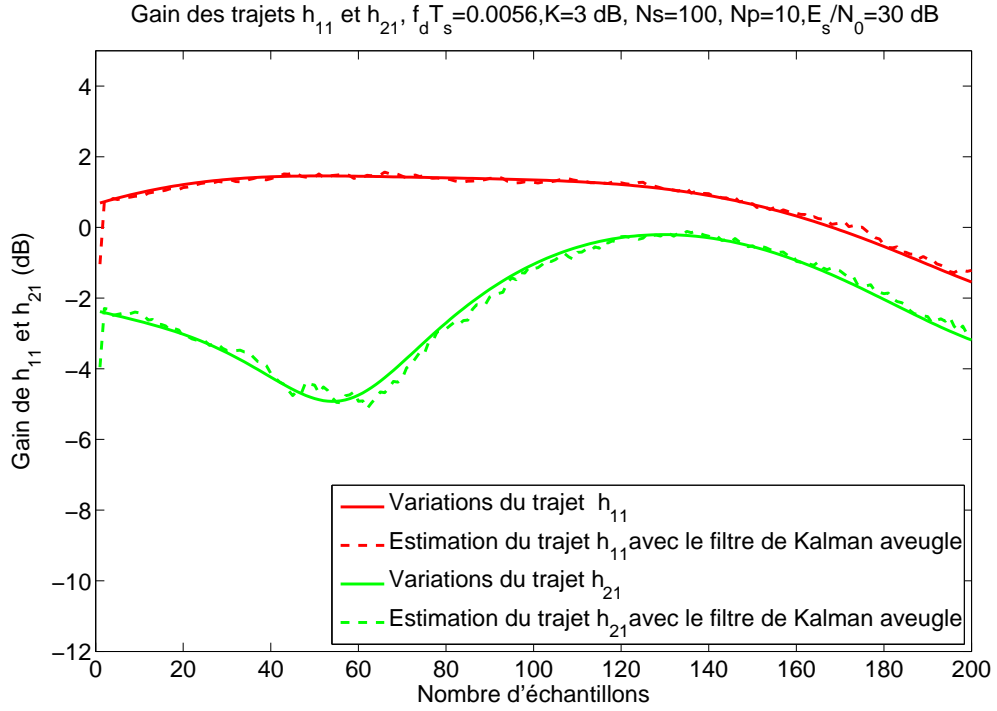


FIG. 5.3 – Estimation des trajets  $h_{11}$  et  $h_{21}$  avec le filtre de Kalman utilisé dans un contexte aveugle

## 5.6 Comparaison entre le filtre de Kalman et l'AMMA adaptatif

Nous allons maintenant comparer les performances du filtre de Kalman initialisé de manière aveugle avec la BSS AMMA adaptative que nous avons proposé au chapitre 4, lorsqu'un canal de Rice ou un canal de Rayleigh sont utilisés.

### 5.6.1 Canal de Rice

Lorsque les symboles sources sont transmis à travers un canal de Rice et décodés à l'aide de l'AMMA adaptatif ou d'un filtre de Kalman initialisé de manière aveugle, nous obtenons le TEB présenté sur la figure 5.4.

Nous pouvons noter que l'AMMA adaptatif n'atteint qu'un taux de  $5 \cdot 10^{-2}$  à 10 dB lorsque le filtre de Kalman atteint un taux de  $6 \cdot 10^{-3}$  pour le même RSB. Nous pouvons donc conclure que le filtre de Kalman initialisé par l'ACMA est préconisé sur de tels canaux contrairement à l'AMMA adaptatif.

### 5.6.2 Canal de Rayleigh

La figure 5.5 représente le TEB obtenu par l'AMMA adaptatif et le filtre de Kalman initialisé de manière aveugle lorsque les symboles sont transmis sur un canal de Rayleigh. Dans ce cas les évanouissements du canal sont beaucoup plus profonds que ceux des canaux

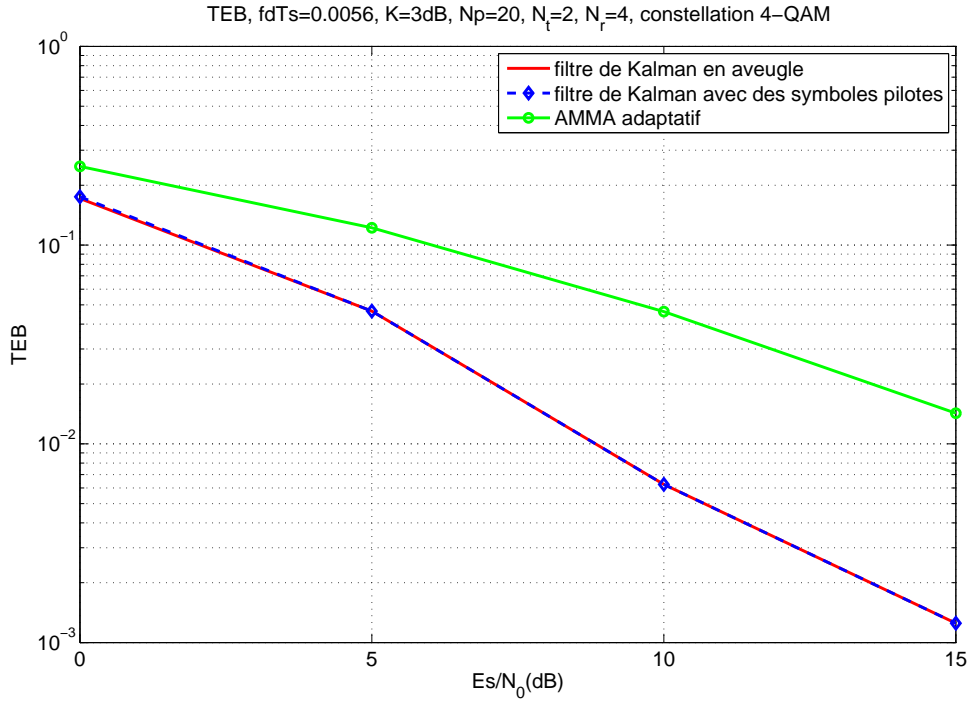


FIG. 5.4 – TEB du filtre de Kalman et de l'AMMA adaptatif, avec un canal de Rice

de Rice, rendant les performances du filtre de Kalman beaucoup moins bonnes lorsque le RSB est faible. Nous pouvons noter que les performances du filtre de Kalman initialisé par l'ACMA sont identiques à celles obtenues par le filtre de Kalman utilisé en coopératif. L'AMMA adaptatif atteint de meilleures performances sur un canal de Rayleigh que sur un canal de Rice. Cela s'explique par l'augmentation de la corrélation entre les coefficients du canal avec celle du facteur de Rice. Ainsi, puisque la BSS suppose que les différents trajets du canal sont statistiquement indépendants, cette hypothèse n'est plus vérifiée avec les canaux de Rice mais uniquement avec les canaux de Rayleigh. Puisque le filtre de Kalman ne fait pas une telle hypothèse sur les trajets du canal, il n'est pas perturbé lorsqu'un canal de Rice est utilisé.

Nous pouvons donc retenir, que l'AMMA adaptatif est plus performant sur des canaux de Rayleigh que le filtre de Kalman lorsque le RSB est faible.

## 5.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons utilisé le filtre de Kalman afin de poursuivre les variations du canal et estimer les symboles transmis. Ce filtre habituellement utilisé dans des systèmes coopératifs est initialisé à l'aide de symboles pilotes. Étant dans un contexte d'interception, nous ne pouvons pas initialiser le filtre de Kalman à l'aide de tels symboles. Nous avons donc proposé dans ce chapitre de l'initialiser à l'aide des symboles estimés à l'aide de la BSS ACMA par blocs et d'une estimée du canal. Une telle initialisation permet d'obtenir des résultats très proches de ceux obtenus par un système coopératif.

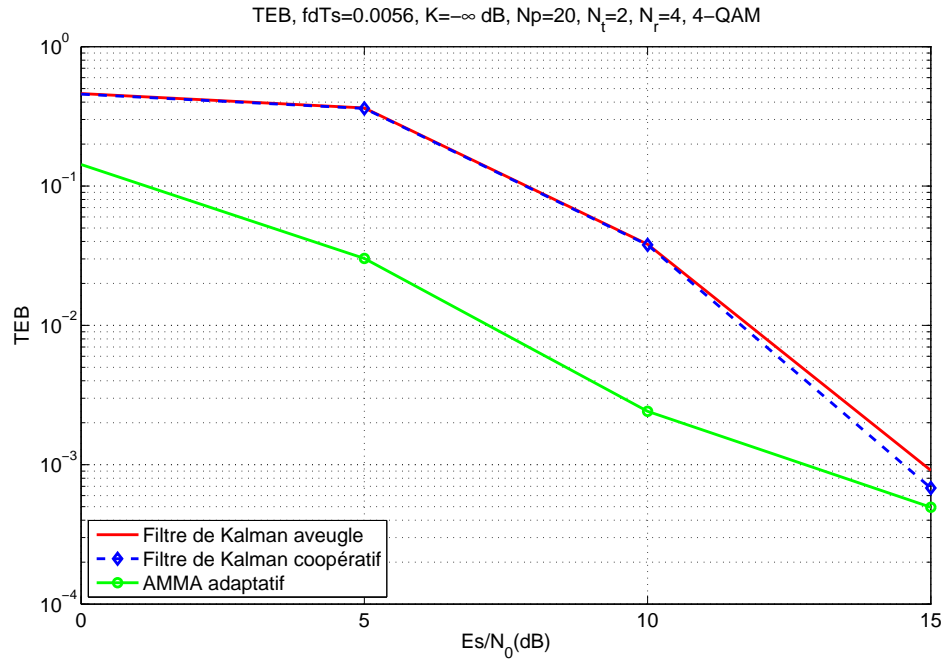


FIG. 5.5 – TEB du filtre de Kalman et de l'AMMA adaptatif, avec un canal de Rayleigh

D'autre part, nous avons comparé les performances de cette méthode avec l'AMMA adaptatif proposé dans le chapitre 4. Ainsi, nous pouvons retenir que le filtre de Kalman est adapté aux canaux de Rice et la BSS AMMA adaptatif, aux canaux de Rayleigh.





## Chapitre 6

# Association filtre de Kalman et BSS : le cas convolutif

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux canaux convolutifs et variants dans le temps. Ce type de canaux étant les plus complexes, peu de solutions existent en séparation aveugle de sources, la plus pertinente a été proposée dans [Ikh08] et permet de retrouver les sources transmises avec un retard  $l$  donné. Cependant, cet algorithme ne peut pas être utilisé sur des canaux variants dans le temps du fait de sa lenteur de convergence. En coopératif, le filtre de Kalman a déjà été utilisé en collaboration avec l'égaliseur DFE<sup>(1)</sup> sur des canaux variables et convolutifs [KFSW02, EK02]. Comme nous l'avons expliqué dans le chapitre 5, le filtre de Kalman doit être initialisé par des symboles pilotes uniquement disponibles en coopératif. Étant en aveugle, nous proposons la même idée que dans le chapitre 5 pour initialiser le filtre de Kalman : nous utiliserons l'ACMA adapté aux canaux convolutifs constants [Ikh08] pour estimer les premiers symboles, qui seront ensuite utilisés pour initialiser le filtre de Kalman.

Dans un premier temps, nous présenterons le modèle théorique des signaux reçus lorsque les sources sont transmises sur des canaux MIMO convolutifs. Puis, nous aborderons l'algorithme ACMA adapté aux canaux convolutifs constants proposé par Ikhlef dans [Ikh08]. Nous présenterons l'égaliseur DFE associé au filtre de Kalman. Nous développerons ensuite notre idée d'utiliser la BSS pour initialiser le filtre de Kalman en aveugle. Finalement, nous présenterons les résultats de simulation obtenus en aveugle et en coopératif.

### 6.1 Modèle théorique

Les canaux utilisés dans ce chapitre sont convolutifs, ainsi lorsque le canal a une profondeur  $L$ , chaque antenne reçoit à l'instant courant les symboles transmis depuis l'instant  $k - L$ . En supposant que la profondeur de chaque sous-canal est la même et égale à  $L$ , le modèle théorique des signaux reçus est le suivant :

---

<sup>(1)</sup>Decision Feedback Equalizer

$$\mathbf{y}(k) = \sum_{n=0}^L \mathbf{H}_n(k) \mathbf{s}(k-n) + \mathbf{b}(k)$$

Nous pouvons aussi les exprimer ainsi :

$$\mathbf{y}(k) = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_0(k) & \mathbf{H}_1(k) & \dots & \mathbf{H}_L(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{s}(k) \\ \mathbf{s}(k-1) \\ \vdots \\ \mathbf{s}(k-L) \end{pmatrix} + \mathbf{b}(k)$$

avec

- $\mathbf{y}(k) = (y_1(k) \dots y_{N_r}(k))^T$  le vecteur des  $N_r$  signaux reçus,
- $\mathbf{s}(k) = (s_1(k) \dots s_{N_t}(k))^T$  les  $N_t$  signaux transmis à l'instant  $k$ ,
- $\mathbf{H}_n$ ,  $n = 1, \dots, L$  la matrice canal de dimension  $N_r \times N_t$  correspondante au  $n^e$  retard.

Nous considérons ensuite le vecteur  $\check{\mathbf{y}}(k)$ , contenant  $N_f + 1$  vecteurs des signaux reçus  $\mathbf{y}(k)$  :

$$\check{\mathbf{y}}(k) = \mathcal{H}(k) \check{\mathbf{s}}(k) + \check{\mathbf{b}}(k)$$

avec  $\check{\mathbf{y}}(k) = (\mathbf{y}^T(k), \mathbf{y}^T(k-1), \dots, \mathbf{y}^T(k-N_f))^T$ ,

$\check{\mathbf{s}}(k) = (\mathbf{s}^T(k), \mathbf{s}^T(k-1), \dots, \mathbf{s}^T(k-N_f-L))^T$ ,

$\check{\mathbf{b}}(k) = (\mathbf{b}^T(k), \mathbf{b}^T(k-1), \dots, \mathbf{b}^T(k-N_f))^T$  et en supposant les matrices de canal  $\mathbf{H}_n$  stationnaires sur  $N_f + 1$  échantillons,  $\mathcal{H}(k) = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_0(k) & \mathbf{H}_1(k) & \dots & \mathbf{H}_L(k) \\ 0 & \mathbf{H}_0(k-1) & \mathbf{H}_1(k-1) & \dots & \mathbf{H}_L(k-1) \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{H}_0(k-N_f) & \mathbf{H}_1(k-N_f) & \dots & \mathbf{H}_L(k-N_f) \end{pmatrix}$  est la matrice de Sylvester de dimension  $(N_f + 1)N_r \times (N_f + L + 1)N_t$  associée à  $\mathbf{H}(k)$  et définie de la manière suivante :

$$\mathcal{H}(k) = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_0(k) & \mathbf{H}_1(k) & \dots & \mathbf{H}_L(k) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_0(k-1) & \mathbf{H}_1(k-1) & \dots & \mathbf{H}_L(k-1) & 0 & \dots \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{H}_0(k-N_f) & \mathbf{H}_1(k-N_f) & \dots & \mathbf{H}_L(k-N_f) \end{pmatrix}$$

Ce modèle sera utilisé par la séparation aveugle de sources et par l'égaliseur DFE.

## 6.2 La séparation aveugle de sources en convolutif

L'algorithme CMA utilisé seul sur des canaux convolutifs [Pap] permet de retrouver, à partir des signaux reçus à l'instant  $k$ , toutes les sources transmises depuis l'instant  $k - L$  jusqu'à  $k$ , mais à une permutation et rotation près. L'ambiguïté sur la permutation ne nous permet plus d'identifier le retard associé aux symboles estimés. Pour palier cet inconvénient, les auteurs de [IMG07b] ont proposé un critère du second ordre associé au CMA afin de récupérer tous les signaux sources avec un certain retard désiré  $l$ .

Afin de réaliser la séparation aveugle de sources lorsque les canaux sont convolutifs, plusieurs hypothèses doivent être considérées :

- $N_r > N_t$ , i.e. le nombre d'antennes réceptrices doit être strictement supérieur au nombre d'antennes émettrices.

–  $\text{rang}(\mathbf{H}(n)) = N_t$ , i.e.  $\mathbf{H}(n)$  est de rang plein.

L'idée des auteurs de [IMG07b] est basée sur le constat suivant :

Soit  $\mathbf{W}^{(l)}$ , la matrice de séparation permettant de retrouver les sources avec un retard  $l$ , i.e.  $\mathbf{W}^{(l)H}\check{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{s}(k-l)$ , puisqu'il existe  $L + N_f + 1$  retards possibles, et donc  $L + N_f + 1$  séparateurs  $\mathbf{W}$  différents, nous obtenons :

$$\mathbf{W}^{(l)}\check{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{W}^{(n)H}\check{\mathbf{y}}(k+n-l) = \mathbf{s}(k-l), \quad l, n = 0, \dots, N_f + L$$

En rangeant  $M$  observations dans une matrice  $\mathbf{Y}(k)$ , définie comme  $\mathbf{Y}(k) = (\check{\mathbf{y}}(k), \check{\mathbf{y}}(k+1), \dots, \check{\mathbf{y}}(k+M-1))$ , l'égalité suivante est obtenue :

$$\mathbf{W}^{(l)}\mathbf{Y}(k) = \mathbf{W}^{(n)}\mathbf{Y}(k+n-l), \quad l, n = 0, \dots, N_f + L, \quad k \geq L$$

En prenant  $M \geq (N_f + 1)N_r$ , la matrice  $\mathbf{Y}(k)$  est une matrice inversible à droite, alors :

$$\mathbf{W}^{(n)H} = \mathbf{W}^{(l)H}\mathbf{Y}(k)\mathbf{Y}(k+n-l)^\sharp, \quad l, n = 0, \dots, N_f + L \quad (6.1)$$

$$= \mathbf{W}^{(l)H}\mathcal{R}_{n-l}(k) \quad (6.2)$$

avec  $\mathcal{R}_{n-l}(k) = \mathbf{Y}(k)\mathbf{Y}(k+n-l)^\sharp$  et  $(.)^\sharp$  représente la pseudo-inverse.

De cette manière, les auteurs de [IMG07b] montrent que tous les séparateurs  $\mathbf{W}^{(n)}$  peuvent être exprimés en fonction d'un seul séparateur avec un certain retard et d'une façon unique. De ce constat, il propose le critère suivant à minimiser :

$$J_{conv} = \sum_{n=0, n \neq l}^{N_f+L} E \left[ \left\| \mathbf{W}^{(l)H}\check{\mathbf{y}}(k) - \mathbf{W}^{(n)H}\check{\mathbf{y}}(k+n-l) \right\|^2 \right]$$

En utilisant l'équation 6.1, le critère  $J_{conv}$  est réécrit de la manière suivante :

$$J_{conv} = \sum_{n=0, n \neq l}^{N_f+L} E \left[ \left\| \mathbf{W}^{(l)H}\mathbf{u}_{n-l}(k) \right\|^2 \right]$$

avec  $\mathbf{u}_{n-l}(k) = \check{\mathbf{y}}(k) - \mathcal{R}_{n-l}(k)\check{\mathbf{y}}(k+n-l)$ .

Dans [IMG07b], il est démontré que seul l'égaliseur  $\mathbf{W} = \mathbf{W}^{(l)}$  minimise le critère  $J_{conv}$ .

Ce critère permet uniquement de transformer un système convolutif en un système instantané. Pour retrouver les sources séparées il doit être associé à un critère de séparation. Dans [Ikh08], le critère de séparation choisi est le CM décrit dans le chapitre 2 implémenté par blocs de manière analytique ou de manière adaptative. Dans ce paragraphe nous présenterons uniquement l'implémentation par blocs que nous utiliserons dans la suite du chapitre. L'implémentation par blocs se fait en deux étapes; dans un premier temps le mélange convolutif est transformé en un mélange instantané à l'aide du critère  $J_{conv}$ , dans un deuxième temps, la séparation aveugle de sources est effectuée en utilisant l'algorithme ACMA [VP96] sur le mélange instantané obtenu par la première étape.

Tout d'abord, les signaux reçus  $\check{\mathbf{y}}(k)$  sont blanchis, il en résulte le vecteur  $\check{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{B}\check{\mathbf{y}}(k)$  de dimension  $N_t(N_f + 1) \times 1$ . En posant  $\tau = n - l$  et  $\mathbf{U}(k) = (u_{-l}(k), \dots, u_{-1}(k), u_1(k), \dots, u_{N_f+L-l}(k))$ , le critère  $J_{conv}$  s'écrit comme :

$$J_{conv} = \sum_{\tau=-l, \tau \neq 0}^{N_f+L-l} E \left[ \|\Xi^H \mathbf{u}_\tau(k)\|^2 \right] \quad (6.3)$$

$$= \Xi^H E [\mathbf{U}(k) \mathbf{U}^H(k)] \Xi \quad (6.4)$$

$$= \Xi^H \mathbf{R}_\mathbf{U} \Xi \quad (6.5)$$

où  $\Xi$  est la matrice de dimension  $N_t(N_f + L + 1) \times N_t$  et  $\mathbf{R}_\mathbf{U} = E [\mathbf{U}(k) \mathbf{U}^H(k)]$ .

Le critère  $J_{conv}$  est ensuite associé à une contrainte d'orthogonalité afin d'éviter la solution triviale  $\Xi = \mathbf{0}$ , ainsi le problème d'optimisation devient :

$$\begin{cases} \min J_{conv} = \Xi^H \mathbf{R}_\mathbf{U} \Xi \\ \text{sous } \Xi^H \Xi = \mathbf{I}_{N_t} \end{cases}$$

La solution de ce problème correspond aux  $N_t$  vecteurs propres de  $\mathbf{R}_\mathbf{U}$  associées aux plus faibles valeurs propres. Ces vecteurs sont obtenus à l'aide d'une décomposition propre de la matrice  $\hat{\mathbf{R}}_\mathbf{U} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{U}(k) \mathbf{U}^H(k)$ , estimée de la matrice  $\mathbf{R}_\mathbf{U}$ .

Une fois la matrice  $\Xi$  obtenue, la matrice de séparation  $\mathbf{T}$ , définie telle que  $\mathbf{W}^H = \mathbf{T}^H \mathbf{F}^H \mathbf{B}$ , est estimée à l'aide de l'algorithme de séparation par blocs ACMA.

Nous allons maintenant présenter l'égaliseur DFE qui sera utilisé conjointement au filtre de Kalman.

### 6.3 L'égaliseur DFE

L'égaliseur DFE est un égaliseur non linéaire qui utilise les symboles estimés précédemment pour estimer les symboles transmis à l'instant  $k - l$ . Ainsi, il est composé de deux filtres : un filtre de retour  $\mathbf{B}_{DFE}$  et un filtre direct  $\mathbf{F}_{DFE}$ . Cet égaliseur a tout d'abord été utilisé dans des contextes SISO [Hsu82, CET<sup>+</sup>00] puis MIMO [ADS00, YR94]. De part sa structure, le DFE est un annuleur d'IES des symboles passés. Cependant sa non-linéarité a pour inconvénient de propager les erreurs, ce qui le rend sensible aux erreurs d'estimation.

L'égaliseur que nous présentons dans ce paragraphe est l'égaliseur MMSE<sup>(2)</sup>-DFE décrit dans [ADS00]. Ce dernier cherche à minimiser la trace et le déterminant de la matrice d'autocorrélation  $\mathbf{R}_e$  du vecteur d'erreur  $\mathbf{e}(k) = \mathbf{s}(k) - \hat{\mathbf{s}}(k)$ , où  $\hat{\mathbf{s}}(k)$  est l'estimation des symboles  $\mathbf{s}(k)$  obtenu en sortie du DFE avant toute décision dure (détecteur à seuil). Pour calculer ce vecteur d'erreur, il est supposé qu'il n'y a pas d'erreur de propagation et que la décision dure sur le vecteur  $\hat{\mathbf{s}}(k)$  donne les symboles transmis  $\mathbf{s}(k)$ .

Le DFE utilise le vecteur  $\check{\mathbf{y}}(k)$  défini dans le paragraphe 6.1 :

$$\check{\mathbf{y}}(k) = \mathcal{H}(k) \check{\mathbf{s}}(k) + \check{\mathbf{b}}(k)$$

La matrice d'autocorrélation de dimension  $N_t(N_f + L + 1) \times N_t(N_f + L + 1)$  des signaux sources est donnée par :

$$\mathbf{R}_s = E[\check{\mathbf{s}}(k) \check{\mathbf{s}}^H(k)]$$

---

<sup>(2)</sup> Minimum Mean Square Error

et celle du bruit  $((N_f + 1)N_r \times (N_f + 1)N_r)$  par :

$$\mathbf{R}_b = E[\check{\mathbf{b}}(k)\check{\mathbf{b}}^H(k)]$$

La matrice d'intercorrelation entrée-sortie et la matrice d'autocorrelation des signaux reçus sont :

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{sy} &= E[\check{\mathbf{s}}(k)\check{\mathbf{y}}^H(k)] = \mathbf{R}_s \mathcal{H}^H(k) \\ \mathbf{R}_y &= E[\check{\mathbf{y}}(k)\check{\mathbf{y}}^H(k)] = \check{\mathbf{y}}(k)\mathbf{R}_s\check{\mathbf{y}}^H(k) + \mathbf{R}_b\end{aligned}$$

Le filtre direct  $\mathbf{F}_{DFE}$  est défini à l'aide de  $N_f + 1$  blocs de dimension  $N_t \times N_r$  comme :

$$\mathbf{F}_{DFE}^H = (\mathbf{F}_0, \mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_{N_f})$$

et le filtre de retour  $\mathbf{B}_{DFE}$  est égal à :

$$\mathbf{B}_{DFE} = (\mathbf{I}_{N_t}, \mathbf{0}_{N_t \times N_t N_b}) - \tilde{\mathbf{B}}_{DFE}^H = (\mathbf{I}_{N_r} - \tilde{\mathbf{B}}_{DFE_0}^H, -\tilde{\mathbf{B}}_{DFE_1}^H, \dots, -\tilde{\mathbf{B}}_{DFE_{N_b}}^H)$$

avec  $\tilde{\mathbf{B}}_{DFE}^H = (\tilde{\mathbf{B}}_{DFE_0}^H, \tilde{\mathbf{B}}_{DFE_1}^H, \dots, \tilde{\mathbf{B}}_{DFE_{N_b}}^H)$ . En définissant la matrice  $\bar{\mathbf{B}}_{DFE}^H = (\mathbf{0}_{N_t \times l N_t}, \tilde{\mathbf{B}}_{DFE}^H)$ , de dimension  $N_t \times N_t(N_f + L + 1)$  et où  $0 \leq l \leq N_f + L + 1$  est le retard désiré qui satisfait  $l + N_b + 1 = N_f + L + 1$ , le vecteur d'erreur peut s'écrire :

$$\mathbf{e}(k) = \bar{\mathbf{B}}_{DFE}^H \check{\mathbf{s}}(k) - \mathbf{F}_{DFE}^H \check{\mathbf{y}}(k)$$

En utilisant le principe d'orthogonalité, qui statue que l'erreur est orthogonale à l'observation, i.e.  $E[\mathbf{e}(k)\check{\mathbf{y}}^H(k)] = \mathbf{0}$ , la relation entre le filtre direct et le filtre de retour est donnée par :

$$\mathbf{F}_{DFE-opt}^H = \bar{\mathbf{B}}_{DFE-opt}^H \mathbf{R}_{sy} \mathbf{R}_y^{-1}$$

Dans [ADS00], il est montré que cette solution minimise à la fois la trace et le déterminant de  $\mathbf{R}_e = E[\mathbf{e}(k)\mathbf{e}^H(k)]$ .

Dans notre contexte seule les décisions passées sont disponibles, ainsi  $\tilde{\mathbf{B}}_{DFE_0}^H = \mathbf{I}_{N_r}$ . Si nous définissons la matrice  $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} \\ \mathbf{R}_{12}^H & \mathbf{R}_{22} \end{pmatrix}$ , donnée par  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_s^{-1} + \mathcal{H}^H \mathbf{R}_b^{-1} \mathcal{H}$ , où  $\mathbf{R}_{11}$  est de dimension  $N_t(l + 1) \times N_t(l + 1)$ . La matrice  $\bar{\mathbf{B}}_{DFE-opt}^H$  qui minimise la trace de  $\mathbf{R}_e$  est donnée par :

$$\bar{\mathbf{B}}_{DFE-opt}^H = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{11} \\ \mathbf{R}_{12}^H \end{pmatrix} \mathbf{R}_{11}^{-1} \mathbf{C}, \quad \text{avec } \mathbf{C}^H = (\mathbf{0}_{N_t \times l N_t}, \mathbf{I}_{N_t})$$

Les signaux transmis à l'instant  $k - l$  sont finalement estimés par :

$$\hat{\mathbf{s}}(k - l) = \mathbf{F}_{DFE-opt}^H \check{\mathbf{y}}(k) + \bar{\mathbf{B}}_{DFE-opt}^H \check{\mathbf{s}}(k - l - 1)$$

## 6.4 Association filtre de Kalman et DFE

Le filtre de Kalman utilisé dans un contexte convolutif pour poursuivre le canal est associé à un égaliseur DFE. Le filtre de Kalman suppose que les décisions émanant du DFE sont parfaites et il les utilise pour estimer le canal alors que le DFE suppose correcte l'estimée du canal fournie par le filtre de Kalman et l'utilise pour estimer les symboles transmis à l'instant  $k - l$ . En effet, le DFE estime les symboles transmis avec un retard  $l$  à partir des signaux reçus  $\check{\mathbf{y}}(k)$  à l'instant  $k$ . Ce retard sur les symboles estimés induit par le DFE, oblige le filtre de Kalman à fonctionner avec un retard  $l$ . Ainsi, au lieu d'estimer le canal à l'instant  $k$ , il l'estime à l'instant  $k - l$  à partir des signaux reçus  $\mathbf{y}(k - l)$ . Cependant, pour estimer les symboles  $\mathbf{s}(k - l)$  le DFE a besoin de l'estimée du canal  $\hat{\mathbf{H}}$  depuis l'instant  $k - N_f$  jusqu'à l'instant  $k$ . Il faut donc, à partir de l'estimée  $\hat{\mathbf{H}}(k - l)$  prédire les canaux  $\hat{\mathbf{H}}(k - l + 1), \dots, \hat{\mathbf{H}}(k)$ . Le synoptique du filtre de Kalman associé au DFE dans un contexte convolutif est donc le suivant :

1.  $\hat{\mathbf{H}}(k - l) = \text{Kalman} \left( \hat{\mathbf{H}}(k - l - 1), \mathbf{y}(k - l), \mathbf{s}(k - l), \dots, \mathbf{s}(k - l - L) \right)$
2.  $\left( \hat{\mathbf{H}}(k - l + 1), \dots, \hat{\mathbf{H}}(k + 1) \right) = \text{Prediction} \left( \hat{\mathbf{H}}(k - l) \right)$
3.  $\mathbf{s}(k - l + 1) = \text{DFE} \left( \hat{\mathbf{H}}(k), \check{\mathbf{y}}(k + 1), \check{\mathbf{s}}(k - l) \right)$

### 6.4.1 Principe du filtre de Kalman

Nous avons pu voir dans le chapitre 5 que le filtre de Kalman repose sur deux équations :

$$\begin{cases} \mathbf{h}(k - l) = \mathbf{F}\mathbf{h}(k - 1 - l) + \mathbf{A}\mathbf{n}(k - l) & \text{l'équation d'état} \\ \mathbf{y}(k - l) = \mathbf{X}'(k - l)\mathbf{h}(k - l) + \mathbf{b}(k - l) & \text{l'équation de mesure} \end{cases}$$

Avec  $\mathbf{h}(k - l) = (\text{vec}^T(\mathbf{H}_0(k - l)), \dots, \text{vec}^T(\mathbf{H}_L(k - l)))$ ,  
 $\mathbf{X}(k - l) = (\mathbf{I}_{N_r} \otimes \mathbf{s}^T(k - l), \dots, \mathbf{I}_{N_r} \otimes \mathbf{s}^T(k - l - L))$ ,  $\mathbf{F} = f\mathbf{I}_{(L+1)N_t N_r}$  et  
 $G = \sqrt{1 - f^2}\mathbf{I}_{(L+1)N_t N_r}$ , avec  $f = J_0(2\pi f_0 T_s)$ . L'algorithme du filtre de Kalman reste inchangé par rapport au cas instantané :

1. Étape de prédiction
  - $\mathbf{h}(k - l | k - l - 1) = \mathbf{F}\mathbf{h}(k - 1 - l | k - 1 - l)$
  - $\mathbf{P}(k - l | k - 1 - l) = \mathbf{F}\mathbf{P}(k - 1 - l | k - 1 - l)\mathbf{F}^H + \mathbf{Q}$
2. Estimation des symboles  $\mathbf{X}(k)$  à l'aide d'un égaliseur
3. Étape d'estimation
  - $\mathbf{K}(k - l) = \frac{\mathbf{P}(k - l | k - 1 - l)\mathbf{X}^H(k - l)}{\mathbf{R}_{b + \mathbf{X}(k - l)\mathbf{P}(k - l | k - 1 - l)\mathbf{X}^H(k - l)}}$
  - $\mathbf{e}(k - l) = \mathbf{y}(k - l) - \mathbf{X}(k - l)\mathbf{h}(k - l | k - 1 - l)$
  - $\mathbf{h}(k - l | k - l) = \mathbf{h}(k - l | k - 1 - l) + \mathbf{K}(k - l)\mathbf{e}(k - l)$
  - $\mathbf{P}(k - l | k - l) = \mathbf{P}(k - l | k - 1 - l) - \mathbf{K}(k - l)\mathbf{X}(k - l)\mathbf{P}(k - l | k - 1 - l)$

### 6.4.2 Prédiction

Pour utiliser le DFE à la suite du filtre de Kalman, les estimées du canal  $\mathbf{h}$  depuis l'instant  $k - N_f$  jusqu'à  $k$  sont nécessaires. Puisque, le filtre de Kalman donne uniquement une estimée de  $\mathbf{h}(k - l)$ , Komminiakis propose dans [KFSW02], une méthode pour estimer les

canaux suivants. La prédiction dépend de la vitesse de variation du canal, ainsi un canal variant lentement est considéré comme constant sur  $l$  échantillons :

$$\mathbf{h}(k) = \mathbf{h}(k-1) = \dots = \mathbf{h}(k-l)$$

où  $\mathbf{h}(k-l)$  a été obtenu à l'aide du filtre de Kalman. Par contre, pour des canaux variant rapidement, l'estimation des canaux aux instants suivants est donnée dans [KFSW02] par :

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(k) &= \mathbf{F}^l \mathbf{h}(k-l) \\ \mathbf{h}(k-1) &= \mathbf{F}^{l-1} \mathbf{h}(k-l) \\ &\vdots \\ \mathbf{h}(k-l+1) &= \mathbf{F} \mathbf{h}(k-l) \end{aligned}$$

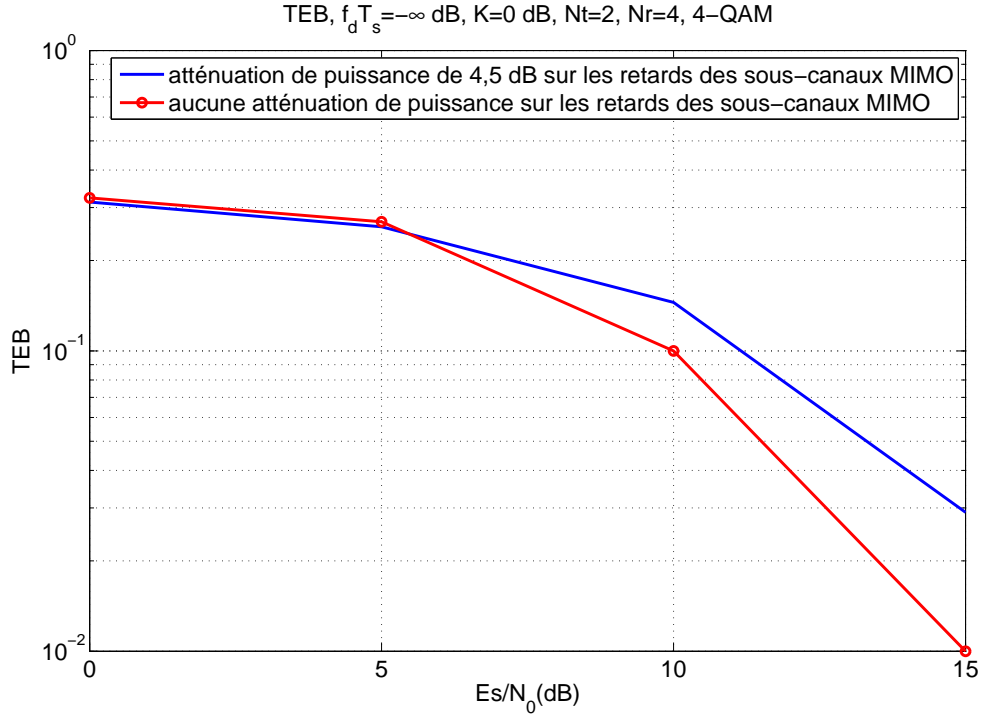


FIG. 6.1 – TEB de l'ACMA par blocs obtenus pour des canaux avec et sans atténuation d'amplitude des trajets retardés. Canaux de Rayleigh

## 6.5 Initialisation du filtre de Kalman

Comme dans le cas instantané, le filtre de Kalman doit être initialisé par des symboles pilotes mais dans un contexte d'interception nous ne possédons pas de tels symboles. Ainsi, nous proposons d'utiliser la séparation aveugle de sources pour estimer les  $N_p$  premiers vecteurs symboles  $\hat{\mathbf{s}}$  transmis et de les utiliser ensuite comme séquence d'apprentissage du



filtre de Kalman. La BSS fonctionnant sur un bloc de vecteurs de taille  $N_p$ , le canal est supposé constant sur  $N_p$  échantillons. Le filtre de Kalman, utilisé avec un DFE fonctionnant avec un retard  $l$ , estime  $\hat{\mathbf{h}}(k-l)$  à chaque instant, ainsi nous utilisons aussi la BSS avec un retard  $l$ . Ces symboles d'apprentissage fournis par la BSS permettent au filtre de Kalman de converger vers le canal  $\mathbf{h}(N_p-l)$ . Une fois le filtre de Kalman amorcé, ce dernier transmet cette estimée au DFE qui estimera les symboles  $\hat{\mathbf{s}}(N_p-l+1)$ , utilisés par le filtre de Kalman à l'itération suivante pour estimer  $\mathbf{h}(N_p-l+1)$ .

## 6.6 Simulations

Gain des trajets directs  $h_{11}$  et  $h_{21}$ ,  $f_d T_s = 0.0011$ ,  $K=4,5\text{dB}$ ,  $N_s=2000$ ,  $N_p=50$ ,  $E_s/N_0=30\text{ dB}$ ,  $N_t=2$ ,  $N_r=4$ , 4-QA

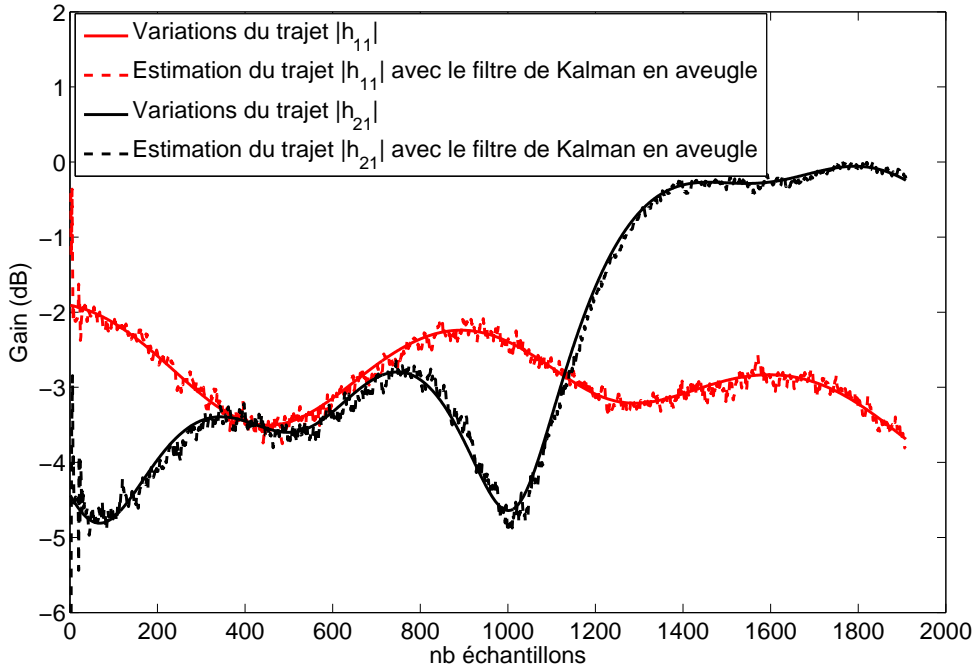


FIG. 6.2 – Gain des trajets directs  $h_{11}$  et  $h_{21}$  avec le filtre de Kalman utilisé dans un contexte aveugle. Canaux de Rice

Toutes les simulations sont réalisées en utilisant des symboles issus d'une constellation 4-QAM et d'un code MIMO BLAST. Ces signaux sources sont transmis sur un canal convolutif de Rayleigh de longueur  $L = 2$ . Deux antennes émettrices et quatre antennes réceptrices sont utilisées. Le retard  $L$  du canal est supposé connu du récepteur. La BSS ACMA et le DFE estiment les symboles avec un retard  $l = 3$ . En effet, Ikhlef a montré dans [Ikh08] que ce retard permet d'optimiser les performances de l'algorithme ACMA.

Dans un premier temps nous allons évaluer les performances de la séparation aveugle de sources ACMA adaptée aux canaux convolutifs proposée dans [Ikh08]. Cet algorithme est comparé sur deux types de canaux différents, le premier ne subit aucune atténuation d'un retard à un autre, quant au second il subit une atténuation de 4 dB entre chaque

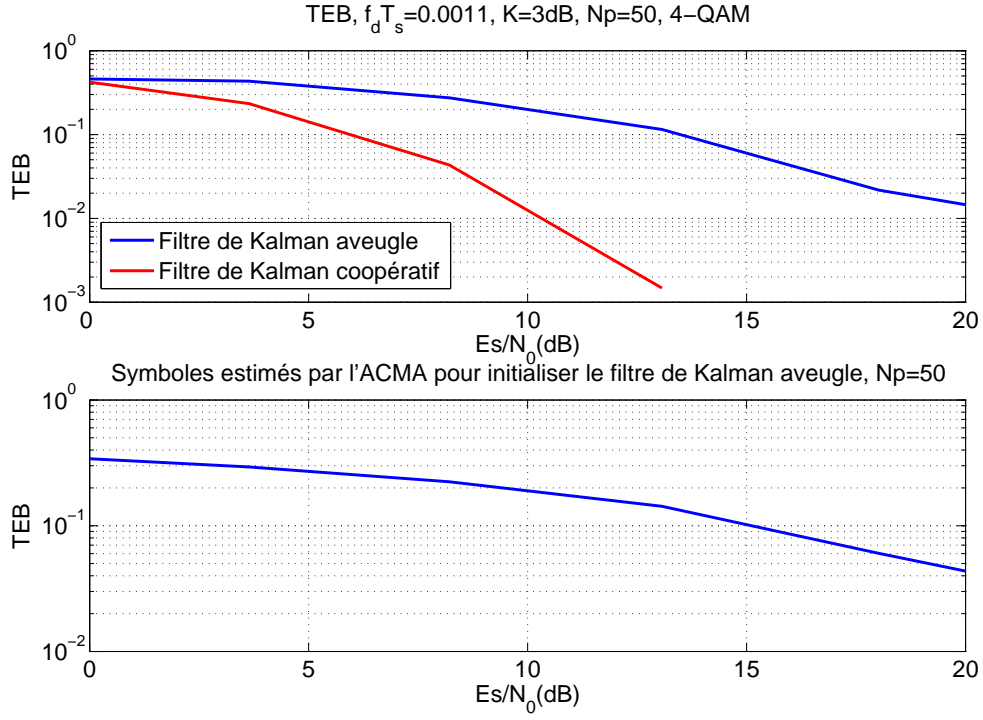


FIG. 6.3 – TEB du filtre de Kalman utilisé en aveugle et en coopératif, avec un canal de Rice

retard.

La figure 6.1 représente le TEB obtenu à l'aide de  $10^4$  symboles transmis sur des canaux de Rayleigh variant dans le temps et convolutifs avec une profondeur  $L=2$ . Nous pouvons noter que la BSS obtient de bien meilleures performances sur des canaux ne subissant aucune atténuation. Ainsi, par la suite, nous utiliserons le filtre de Kalman sur des canaux convolutifs ne subissant aucune atténuation d'un retard à l'autre.

Nous allons maintenant comparer les performances du filtre de Kalman associé à un DFE, initialisé de manière aveugle, i.e. à l'aide de la BSS ACMA par blocs et d'un filtre de Kalman initialisé à l'aide de vrais symboles pilotes. Les canaux utilisés varient faiblement dans le temps avec un taux Doppler  $f_d T_s$  égal à 0.0011. Le nombre de symboles ( $N_p$ ) utilisés pour initialiser les filtres de Kalman est fixé à 50.

La figure 6.2 représente deux trajets directs du canal et les estimées de ceux-ci obtenues par le filtre de Kalman utilisé en aveugle, avec un SNR de 30 dB. Nous pouvons noter que le filtre de Kalman associé au DFE poursuit parfaitement bien les variations du canal.

Les TEB obtenus par le filtre de Kalman, aveugle et coopératif sont représentés sur la figure 6.3. Pour tracer les TEB, nous avons utilisé  $10^6$  symboles transmis sur un canal variant dans le temps. Sur cette même figure est représenté le TEB de la séquence d'apprentissage obtenue par l'ACMA convolutif. Nous pouvons noter que les performances du

filtre de Kalman en coopératif devancent largement celles du filtre de Kalman en aveugle. Cela peut être expliqué par le TEB de l'ACMA convolutif qui ne descend pas en dessous de  $10^{-2}$ . Ainsi, lorsque le filtre de Kalman est mal initialisé cela se répercute sur l'ensemble des symboles estimés.

## 6.7 Conclusion

Nous avons utilisé dans ce chapitre le filtre de Kalman associé à un DFE sur des canaux convolutifs et variables. Ce type de méthode nécessitant une initialisation, nous avons proposé d'utiliser la BSS ACMA adaptée pour des canaux convolutifs, pour estimer les premiers symboles transmis. Ces symboles sont ensuite transmis au filtre de Kalman afin de l'initialiser.

Cette méthode possède des limites, en effet, le TEB obtenu est moins bon que celui obtenu par le filtre de Kalman en coopératif. D'autre part, la BSS utilisée pour initialiser le filtre de Kalman ne fonctionne bien que sur des canaux convolutifs MIMO ne subissant aucune atténuation d'un retard à un autre. En améliorant les performances de la BSS ACMA en convolutif, celles de l'association BSS et filtre de Kalman se verront augmentées.

# Conclusion

## Résumé des travaux

Nos travaux ont porté sur la démodulation aveugle pour des communications MIMO dans un contexte d'interception. Ce travail faisait partie d'un projet industriel d'écoute de signaux MIMO. Il était découpé en deux parties, la première visant à intercepter les signaux et estimer les différents paramètres de transmission nécessaires pour la démodulation, à savoir le nombre d'antennes émettrices, la modulation et le code MIMO. La seconde était l'objet de cette thèse et porte sur l'estimation des symboles transmis.

Nos recherches ont donc porté sur la démodulation MIMO de signaux transmis sur tous types de canaux, i.e. sélectifs ou instantanés et variables ou constants. Les signaux MIMO transmis étaient supposés résulter d'un codage BLAST ou STBC du type Alamouti, Tarokh ou code d'Or. Le chapitre 1 a permis d'introduire le modèle théorique des signaux reçus, les différents canaux envisagés et les codes MIMO utilisés.

Afin de démoduler les signaux reçus, la principale méthode utilisée est la séparation aveugle de sources puisqu'elle permet d'estimer les sources sans aucune connaissance du canal. Le principe de celle-ci a été présenté dans le chapitre 2. Ses limites ont aussi été abordées, à savoir l'introduction d'une phase et d'une permutation sur la matrice de séparation ainsi qu'une convergence relativement lente des algorithmes utilisant un gradient stochastique. Les fonctions de coût MM, MUK, CM, CQ et SCQ ont été présentées. A travers les simulations, nous avons pu voir que les algorithmes MM et SCQ permettent de poursuivre un résidu de phase contrairement aux autres algorithmes, ce qui leur donne un côté attrayant.

Dans le chapitre 3, nous nous sommes intéressés à l'exploitation de la redondance introduite par les codes STBC d'Alamouti, de Tarokh et d'Or afin de séparer les sources tout en diminuant le nombre d'indéterminations introduites par la BSS (ordre et phase). Pour cela nous avons proposé plusieurs critères. Une étude des points stationnaires de ces critères a été proposée et illustrée par les résultats de simulations. Cette contribution a fait l'objet d'une publication [DG07b, DG07a]. A travers les études théoriques et les simulations, nous avons montré que les critères proposés pour les codes d'Alamouti et de Tarokh permettent à la fois de diminuer le taux d'erreur binaire par rapport à une BSS classique, de retrouver la même ambiguïté de phase sur chacune des lignes de la matrice de séparation obtenue en sortie de la BSS et de lever l'ambiguïté sur l'ordre lorsqu'un code de Tarokh est utilisé. Par contre, nous avons pu constater lors des simulations que

l'algorithme associé au code d'Or et utilisant un gradient stochastique à pas fixe converge vers une solution ne correspondant pas à un minima, pour éviter d'obtenir des solutions non désirables nous avons donc utilisé un gradient stochastique à pas variable permettant une meilleure convergence.

Le chapitre 4 a présenté des méthodes de séparation de sources utilisant des outils analytiques pour minimiser les critères MM et SCM par blocs ou de manière adaptative. Ce type de méthode avait déjà été utilisé sur le critère CM et est nommé ACMA. Dans le chapitre 2, nous avons pu voir que les critères MM et SCM peuvent poursuivre un résidu de phase contrairement au CM. D'autre part, les méthodes analytiques comme l'ACMA possèdent une convergence rapide (par blocs ou adaptatif) et peuvent être utilisés sur des canaux qui varient dans le temps. Ces deux constatations nous ont poussé à implémenter les critères MM et SCM de manière analytique donnant ainsi les algorithmes AMMA et ASCMA. Ces contributions ont fait l'objet de publications [DG09b, DG09a]. La limite de ce type d'algorithme réside dans l'utilisation d'algorithme de poursuite de sous-espace dans la version adaptative. Ce type d'algorithme étant soit stable soit rapide, lorsqu'on utilise l'ACMA, l'AMMA et l'ASCMA adaptatif sur des constellations 16-QAM ou supérieures, l'algorithme devient lent à converger n'excédant alors plus les performances des algorithmes CMA, MMA et SCMA.

Le chapitre 5 cherchait aussi à estimer les sources sur des canaux variant rapidement dans le temps. De nombreux travaux proposent d'utiliser le filtre de Kalman pour poursuivre les variations du canal dans un contexte coopératif. Cependant, ce type de filtre doit être initialisé par des symboles pilotes et/ou par le canal de transmission. Mais en interception nous ne possédons pas de tels symboles. Nous avons donc proposé d'utiliser la BSS ACMA par blocs sur les premiers symboles reçus afin d'estimer les sources et le canal de transmission. Une fois estimés, ils sont transmis au filtre de Kalman afin de l'initialiser. Nous avons montré à travers des simulations que les performances obtenues par cette méthode sont aussi bonnes que celles obtenues avec le filtre de Kalman initialisé par de vrais symboles pilotes. Cette contribution a fait l'objet d'une publication [DG08].

Le chapitre 6 présentait l'association du filtre de Kalman avec la BSS mais cette fois dans un environnement convolutif et variable. Pour initialiser le filtre de Kalman de manière aveugle nous avons utilisé la BSS ACMA par blocs adaptée aux canaux convolutifs et proposée dans [Ikh08]. A travers les simulations, nous avons pu voir que les performances de cette association ne se superposent pas avec celles du filtre de Kalman initialisée avec de vrais symboles d'apprentissage.

## Synthèse

Les travaux effectués durant cette thèse ont permis de résoudre la problématique principale : estimer les sources de manière aveugle, tout en répondant à trois objectifs fixés, à savoir :

- **Problématique** : Estimer les sources de manière aveugle.
- **Objectif 1** : Lever certaines indéterminations sur la phase et l'ordre des sources introduite par la BSS.

- **Objectif 2** : Estimer les sources de manière aveugle dans un environnement sélectif en temps.
- **Objectif 3** : Estimer les sources de manière aveugle dans un environnement sélectif en temps et en fréquence.

Chapitre	Objectif atteint	Apports
Chapitre 3	1	Proposition de nouveaux critères pour résoudre la problématique et atteindre l'objectif 1 lorsqu'un code d'Alamouti, de Tarokh ou d'Or est utilisé.
Chapitre 4	2	Utilisation d'une méthode analytique pour minimiser les critères MM et SCM afin d'obtenir une convergence rapide et poursuivre le résidu de phase porteuse.
Chapitre 5	2	Initialisation du filtre de Kalman par la BSS ACMA par blocs, le filtre de Kalman permet ensuite de poursuivre les variations rapides du canal. Les symboles sont finalement estimés à l'aide d'un égaliseur.
Chapitre 6	3	Initialisation du filtre de Kalman par la BSS ACMA par blocs adaptée au convolutif, le filtre de Kalman permet ensuite de poursuivre les variations rapides du canal. Les symboles sont finalement estimés à l'aide d'un égaliseur DFE.

TAB. 6.1 – Tableau récapitulatif des apports de la thèse

## Perspectives

Les travaux réalisés dans le cadre de cette thèse ouvrent plusieurs axes de recherche. Nous en proposons quatre, chacun étant issu des chapitres présentant nos contributions.

- Dans le troisième chapitre nous avons proposé deux critères permettant d'exploiter la redondance des codes d'Alamouti et de Tarokh. Cependant, rien n'empêche de chercher d'autres critères pour différents codes STBC. Nous avons aussi proposé un critère pour le code d'Or qui est un code STBC linéaire. Le principe de ce critère peut être étendu à tous types de codes STBC linéaire moyennant quelques modifications.
- Dans le chapitre 4, nous avons proposé les algorithmes AMMA et ASCMA adaptatifs obtenus à l'aide d'outils analytiques, ces algorithmes permettent d'obtenir une convergence rapide et utilisent des méthodes de poursuite de sous-espace. Cependant, ces derniers convergent lentement vers la solution lorsqu'une modulation 16-QAM est utilisée. L'AMMA et l'ASCMA perdent alors leur qualité de rapidité de convergence. D'autres algorithmes de poursuite de sous-espace plus performants devront

être proposés.

- Les chapitres 5 et 6 ont proposé une association du filtre de Kalman avec la BSS afin d’obtenir de bonnes performances sur des canaux variant rapidement. D’autres combinaisons de méthodes pourront être imaginées.
- Le chapitre 6 a introduit une méthode de séparation aveugle de sources utilisable sur des canaux convolutifs. Cependant, peu de travaux existent dans ce domaine et les seules BSS existantes conduisent à des TEB élevés par rapport au cas instantané. Ainsi, lorsqu’on les utilise pour initialiser un filtre de Kalman, il en résulte un TEB plus grand que celui obtenu par un filtre de Kalman utilisé dans un contexte coopératif. Des travaux restent à faire pour améliorer ces algorithmes de BSS adaptés pour des canaux convolutifs.

## Publications

### Revue

- S. Daumont and D. Le Guennec, "An analytical multi-modulus algorithm for blind demodulation in a time-varying MIMO channel context ", *International Journal of Digital Multimedia Broadcasting*, EURASIP, Hindawi, 2009

### Conférences internationales avec actes

- S. Daumont and D. Le Guennec, "Adaptive Analytical Simplified Constant Modulus Algorithm : A BSS algorithm for MIMO systems with time-varying environments", *European Association for Signal Processing (Eusipco)*, Scotland, Glasgow, August 2009
- S. Daumont and D. Le Guennec, "Adaptive Analytical MMA with time-varying MIMO channels and diversity in interception context", *IEEE International Conference on Digital Signal Processing (DSP)*, Greece, Santorini, July 2009
- S. Daumont and D. Le Guennec, "Blind tracking of time-varying MIMO channel with Alamouti scheme in interception context", *International Symposium on Wireless Communication Systems, ISWCS*, Island, Reykjavik, October 2008
- S. Daumont and D. Le Guennec, "Blind source separation with order recovery for MIMO system and an Alamouti or Tarokh space-time block coding scheme", *IEEE symp. on signal processing and information technology, ISSPIT*, pp. 437-442, Egypt, Cairo, December 2007

### Conférence nationale avec acte

- S. Daumont and D. Le Guennec, "Séparation aveugle de source pour des systèmes MIMO et un codage d'Alamouti et de Tarokh", *Majestic*, France, Caen, October 2007

### Séminaire SCEE

- S. Daumont, "Démodulation aveugle dans un système d'interception MIMO", *Supélec Rennes-SCEE*, 2 octobre 2008

### Rapports DGA

- S. Daumont, "Études qualitatives sur les techniques de codage MIMO", version 1 : 7 juillet 2007, version 2 : 20 septembre 2007, version 3 : 1 février 2008.
- S. Daumont, "Rapport d'avancement technique", version 1 : 9 janvier 2008, version 2 : 22 mai 2008.
- S. Daumont, "Rapport d'avancement technique à T0+12", 12 février 2008.
- Livraison le 8 décembre 2008 de l'algorithme du filtre de Kalman initialisé par une BSS et associé aux égaliseurs OSIC, ZF et MMSE pour implémentation dans le simulateur IPSIS-DGA.





# Annexe



## Annexe A

# Expression théorique de l'EQM en exploitant la redondance introduite par le code d'Alamouti

L'expression théorique de l'EQM des symboles estimés lorsque nous exploitons la redondance ( $EQM1(\sigma_b^2)$ ) introduite par un code d'Alamouti est donnée par :

$$\begin{aligned}
 EQM1(\sigma_b^2) &= 10 \times \log_{10} \left( \frac{1}{N_s} \sum_{k=0}^{N_s-1} |\hat{s}(k) - s(k)|^2 \right) \\
 &= 10 \log_{10} \left[ \frac{1}{N_s} \sum_{k \in F} \left( \left| \frac{z_1(2k) + z_2^*(2k+1)}{2} - s(k) \right|^2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left| \frac{z_2(2k) - z_1^*(2k+1)}{2} - s(k+1) \right|^2 \right) \right] \\
 &= 10 \log_{10} \left[ \frac{1}{N_s} \sum_{k \in F} \left( \left| \frac{g_{11}s(k) + g_{21}s(k+1) + w_{11}b_1(k) + w_{21}b_2(k) - g_{12}^*s(k+1) + g_{22}^*s(k) + w_{12}^*b_1^*(k+1) + w_{22}^*b_2^*(k+1)}{2} - s(k) \right|^2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left| \frac{g_{12}s(k) + g_{22}s(k+1) + w_{12}b_1(k) + w_{22}b_2(k) + g_{11}^*s(k+1) - g_{21}^*s(k) - w_{11}^*b_1^*(k+1) - w_{21}^*b_2^*(k+1)}{2} - s(k+1) \right|^2 \right) \right]
 \end{aligned}$$

où  $g_{kl} = \mathbf{G}(k, l)$  et  $w_{kl} = \mathbf{W}(k, l)$ . En gardant en mémoire que :

- Les bruits  $\mathbf{b}(k)$  additifs sont blancs, de variance  $\sigma_b^2$ , i.e.  $E[\mathbf{B}(k)\mathbf{B}^H(k+l)] = \sigma_b^2 \times \delta(l)\mathbf{I}_{N_t}$ , et sont mutuellement indépendants.
- Les signaux  $s(k)$  ont une moyenne nulle, sont i.i.d. et ont une puissance unitaire.
- Le bruit  $\mathbf{b}(k)$  et les symboles  $s(k)$  sont mutuellement indépendants.

on obtient :

$$EQM1(\sigma_b^2) = 10 \times \log_{10} \left( \frac{|g_{11} + g_{22}^* - 2|^2 + |g_{21} - g_{12}^*|^2}{4} + \frac{\sigma_b^2}{2} \right)$$

De la même manière, nous obtenons l'EQM théorique lorsque la redondance n'est pas exploitée ( $EQM2(\sigma_b^2)$ ) :

$$\begin{aligned} EQM2(\sigma_b^2) &= 10 \times \log_{10} \left( \frac{1}{N_s} \sum_{k=0}^{N_s-1} |\hat{s}(k) - s(k)|^2 \right) \\ &= 10 \log_{10} \left( \frac{1}{N_s} \sum_{k \in E} (|z_1(k) - s(k)|^2 + |z_2(k) - s(k+1)|^2) \right) \\ &= 10 \log_{10} \left( \frac{1}{N_s} \sum_{k \in E} (|g_{11}s(k) + g_{21}s(k+1) + w_{11}b_1(k) + w_{21}b_2(k) - s(k)|^2 \right. \\ &\quad \left. + |g_{12}s(k) + g_{22}s(k+1) + w_{12}b_1(k) + w_{22}b_2(k) - s(k+1)|^2) \right) \end{aligned}$$

En utilisant les mêmes hypothèses que précédemment, on obtient :

$$EQM2(\sigma_b^2) = 10 \times \log_{10} \left( \frac{|g_{11} - 1|^2 + |g_{21}|^2}{2} + \frac{|g_{22} - 1|^2 + |g_{12}|^2}{2} + \sigma_b^2 \right)$$

Ainsi, la différence entre l'EQM obtenue lorsque la redondance est exploitée et l'EQM obtenue sans exploiter la redondance est :

$$EQM1(\sigma_b^2) - EQM2(\sigma_b^2) = 10 \times \log_{10} \left( \frac{1}{2} \times \frac{|g_{11} + g_{22}^* - 2|^2 + |g_{21} - g_{12}^*|^2 + 2\sigma_b^2}{|g_{11} - 1|^2 + |g_{21}|^2 + |g_{22} - 1|^2 + |g_{12}|^2 + 2\sigma_b^2} \right)$$

Sans interférence inter antennes,  $g_{11} \rightarrow 1$ ,  $g_{22} \rightarrow 1$ ,  $g_{21} \rightarrow 0$  et  $g_{12} \rightarrow 0$ , ainsi :

$$EQM1(\sigma_b^2) - EQM2(\sigma_b^2) = 10 \times \log_{10} \left( \frac{1}{2} \right) = -3dB$$

## Annexe B

# Recherche des minima du critère

$$J_{CMA} + J_{\mathcal{G}_3}$$

Nous allons montrer dans cette annexe que la minimisation du critère  $J = J_{CMA} + J_{\mathcal{G}_3}$  sous la contrainte  $\mathbf{G}^H \mathbf{G} = \mathbf{I}_3$  conduit aux sources transmises dans le bon ordre à une rotation près identique sur toutes les sorties.

Nous rechercherons dans un premier temps les points stationnaires, obtenus à partir de la fonction de coût et des contraintes, l'analyse de ceux-ci sera effectuée en utilisant la matrice Hessienne.

Les signaux obtenus en sortie de la BSS s'écrivent comme :

$$\begin{pmatrix} z_1(4k) & z_1(4k+1) & z_1(4k+2) & z_1(4k+3) \\ z_2(4k) & z_2(4k+1) & z_2(4k+2) & z_3(4k+3) \\ z_3(4k) & z_3(4k+1) & z_3(4k+2) & z_4(4k+3) \end{pmatrix} \\ = \mathbf{G}^H \begin{pmatrix} s(4k) & -s(4k+1) & -s(4k+2) & -s(4k+3) \\ s(4k+1) & s(4k) & s(4k+3) & -s(4k+2) \\ s(4k+2) & -s(4k+3) & s(4k) & s(4k+1) \end{pmatrix}$$

Avec  $\mathbf{G}^H = \mathbf{W}^H \tilde{\mathbf{H}}$

Le critère  $J$  à minimiser est donné par :

$$\begin{cases} J(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_3) = \sum_{n=1}^3 E \left[ \left| |z_n(4k)|^2 - R \right|^2 \right] + \frac{1}{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} |2z_1(4k) - z_2(4k+1) - z_3(4k+2)|^2 \\ \text{sous } \mathbf{G}^H \mathbf{G} = \mathbf{I}_3 \end{cases}$$

### B.1 La fonction de coût

En développant, on obtient l'expression de  $J(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_3)$  :

$$\begin{aligned} J(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_3) &= \sum_{n=1}^3 \left( E \left[ |z_n(4k)|^4 \right] - 2R \cdot E \left[ |z_n(4k)|^2 \right] + R^2 \right) + \\ &\quad \frac{1}{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} |2z_1(4k) - z_2(4k+1) - z_3(4k+2)|^2 \end{aligned}$$

Les propriétés statistiques des symboles transmis permettent d'obtenir :

$$E \left[ |z_n(k)|^2 \right] = |g_{1n}|^2 + |g_{2n}|^2 + |g_{3n}|^2$$

$$E \left[ |z_n(k)|^4 \right] = (|g_{1n}|^4 + |g_{2n}|^4 + |g_{3n}|^4) q + 4 (|g_{1n}|^2 |g_{2n}|^2 + |g_{1n}|^2 |g_{3n}|^2 + |g_{2n}|^2 |g_{3n}|^2)$$

avec  $q = E \left[ |s(k)|^4 \right]$ , puisque  $\sigma_s^2 = 1$  alors  $R = q$ . Et puisque les symboles transmis sont i.i.d., nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} |2z_1(4k) - z_2(4k+1) - z_3(4k+2)|^2 &= 4 (|g_{11}|^2 + |g_{21}|^2 + |g_{31}|^2) + \\ &+ (|g_{12}|^2 + |g_{22}|^2 + |g_{32}|^2) + (|g_{13}|^2 + |g_{23}|^2 + |g_{33}|^2) - 2 (g_{11}g_{22}^* - g_{12}g_{21}^*) \\ &- 2 (g_{11}g_{33}^* - g_{13}g_{31}^*) - 2 (g_{22}g_{11}^* - g_{21}g_{12}^*) + (g_{22}g_{33}^* - g_{23}g_{32}^*) \\ &- 2 (g_{33}g_{11}^* - g_{31}g_{13}^*) + (g_{33}g_{22}^* - g_{32}g_{23}^*) \end{aligned}$$

Finalement, la fonction de coût est fonction uniquement des variables  $g_{mn}$  :

$$\begin{aligned} J(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_3) &= \sum_{n=1}^3 \left( (|g_{1n}|^4 + |g_{2n}|^4 + |g_{3n}|^4) q + \right. \\ &+ 4 (|g_{1n}|^2 |g_{2n}|^2 + |g_{1n}|^2 |g_{3n}|^2 + |g_{2n}|^2 |g_{3n}|^2) - 2q (|g_{1n}|^2 + |g_{2n}|^2 + |g_{3n}|^2) + q \left. \right) + \\ &+ 4 (|g_{11}|^2 + |g_{21}|^2 + |g_{31}|^2) + (|g_{12}|^2 + |g_{22}|^2 + |g_{32}|^2) + \\ &+ (|g_{13}|^2 + |g_{23}|^2 + |g_{33}|^2) - 2 (g_{11}g_{22}^* - g_{12}g_{21}^*) - 2 (g_{11}g_{33}^* - g_{13}g_{31}^*) \\ &- 2 (g_{22}g_{11}^* - g_{21}g_{12}^*) + (g_{22}g_{33}^* - g_{23}g_{32}^*) \\ &- 2 (g_{33}g_{11}^* - g_{31}g_{13}^*) + (g_{33}g_{22}^* - g_{32}g_{23}^*) \end{aligned}$$

## B.2 Étude des points stationnaires

Pour obtenir les points stationnaires du critère, nous résolvons le système (S) :

$$(S) \begin{cases} \frac{\partial J}{\partial g_{nm}} = 0, & n, m \in \{1, \dots, 3\} \\ \frac{\partial J}{\partial g_{nm}^*} = 0, & n, m \in \{1, \dots, 3\} \end{cases}$$

En développant on obtient :

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial J}{\partial g_{11}^*} = \left( \frac{\partial J}{\partial g_{11}} \right)^* = g_{11} \left( 2|g_{11}|^2 q + 4(|g_{21}|^2 + |g_{23}|^2) + 2(2 - q) \right) - 2(g_{22} + g_{33}) = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial g_{22}^*} = \left( \frac{\partial J}{\partial g_{22}} \right)^* = g_{22} \left( 2|g_{22}|^2 q + 4(|g_{12}|^2 + |g_{32}|^2) + 1 - 2q \right) + g_{33} - 2g_{11} = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial g_{33}^*} = \left( \frac{\partial J}{\partial g_{33}} \right)^* = g_{33} \left( 2|g_{33}|^2 q + 4(|g_{13}|^2 + |g_{23}|^2) + 1 - 2q \right) + g_{22} - 2g_{11} = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial g_{12}^*} = \left( \frac{\partial J}{\partial g_{12}} \right)^* = g_{12} \left( 2|g_{12}|^2 q + 4(|g_{22}|^2 + |g_{32}|^2) + 1 - 2q \right) + 2g_{21} = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial g_{13}^*} = \left( \frac{\partial J}{\partial g_{13}} \right)^* = g_{13} \left( 2|g_{13}|^2 q + 4(|g_{23}|^2 + |g_{33}|^2) + 1 - 2q \right) + 2g_{31} = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial g_{21}^*} = \left( \frac{\partial J}{\partial g_{21}} \right)^* = g_{21} \left( 2|g_{21}|^2 q + 4(|g_{11}|^2 + |g_{31}|^2) + 2(2 - q) \right) + 2g_{12} = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial g_{23}^*} = \left( \frac{\partial J}{\partial g_{23}} \right)^* = g_{23} \left( 2|g_{23}|^2 q + 4(|g_{13}|^2 + |g_{33}|^2) + 1 - 2q \right) - g_{32} = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial g_{31}^*} = \left( \frac{\partial J}{\partial g_{31}} \right)^* = g_{31} \left( 2|g_{31}|^2 q + 4(|g_{21}|^2 + |g_{11}|^2) + 2(2 - q) \right) + 2g_{13} = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial g_{32}^*} = \left( \frac{\partial J}{\partial g_{32}} \right)^* = g_{32} \left( 2|g_{32}|^2 q + 4(|g_{12}|^2 + |g_{22}|^2) + (1 - 2q) \right) - g_{23} = 0 \end{array} \right.$$

Pour résoudre ce système, supposons que l'ensemble des contraintes est vérifié à chaque instant, ce qui nous conduit au système des contraintes (C) suivant :

$$(C) \left\{ \begin{array}{l} |g_{11}|^2 + |g_{21}|^2 + |g_{31}|^2 - 1 = 0 \\ |g_{12}|^2 + |g_{22}|^2 + |g_{32}|^2 - 1 = 0 \\ |g_{13}|^2 + |g_{23}|^2 + |g_{33}|^2 - 1 = 0 \end{array} \right.$$



En utilisant le système (S) et les contraintes (C) on obtient le système (S') à résoudre :

$$(S), (C) \Rightarrow (S') \left\{ \begin{array}{l} g_{11} \left( (q-2)(|g_{11}|^2 - 1) + 2 \right) = g_{22} + g_{33} \\ g_{22} \left( 2(q-2)(|g_{22}|^2 - 1) + 1 \right) = -g_{33} + 2g_{11} \\ g_{33} \left( 2(q-2)(|g_{33}|^2 - 1) + 1 \right) = -g_{22} + 2g_{11} \\ g_{12} \left( 2(q-2)(|g_{12}|^2 - 1) + 1 \right) = -2g_{21} \\ g_{21} \left( (q-2)(|g_{21}|^2 - 1) + 2 \right) = -g_{12} \\ g_{13} \left( 2(q-2)(|g_{13}|^2 - 1) + 1 \right) = -2g_{31} \\ g_{31} \left( (q-2)(|g_{31}|^2 - 1) + 2 \right) = -g_{13} \\ g_{23} \left( 2(q-2)(|g_{23}|^2 - 1) + 1 \right) = g_{32} \\ g_{32} \left( 2(q-2)(|g_{32}|^2 - 1) + 1 \right) = g_{23} \end{array} \right.$$

**Propriété B.2.1** *Seul le point  $g_{11} = g_{22} = g_{33}$  et  $g_{mn} = 0$ ,  $m \neq n \in \{1, \dots, 3\}$  avec  $|g_{nn}|^2 = 1$  est solution du système (S') et donc un point stationnaire du critère  $J$  sous la contrainte  $\mathbf{G}^H \mathbf{G} = \mathbf{I}_3$*

**Preuve B.2.1** 1. *Démontrons tout d'abord que  $g_{12} = g_{21} = 0$ .*

*D'après le système des contraintes (C), on a  $0 \leq |g_{mn}|^2 \leq 1$  et puisque  $1 \leq q < 2$  lorsque des signaux de télécommunications numériques sont utilisés, nous obtenons les inégalités suivantes :*

$$\left\{ \begin{array}{l} 2(q-2)(|g_{12}|^2 - 1) + 1 \geq 1 \\ (q-2)(|g_{21}|^2 - 1) + 2 \geq 2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |g_{12}| \leq 2|g_{21}| \\ |g_{12}| \geq 2|g_{21}| \end{array} \right. \Rightarrow |g_{12}| = 2|g_{21}|$$

*Pour que cette égalité soit vérifiée dans le système (S'), il faut que les modules de ces deux variables soient égaux à 1 :*

$$\left\{ \begin{array}{l} 2(q-2)(|g_{12}|^2 - 1) = 0 \\ \text{et } (q-2)(|g_{21}|^2 - 1) = 0 \\ \text{ou } g_{12} = g_{21} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |g_{12}|^2 = 1 \\ \text{et } |g_{21}|^2 = 1 \\ \text{ou } g_{12} = g_{21} = 0 \end{array} \right.$$

Puisque nous venons de démontrer que  $|g_{12}| = 2|g_{21}|$ , l'unique solution est  $g_{12} = g_{21} = 0$ .

2. **La même démonstration peut être faite pour les variables  $g_{13}$  et  $g_{31}$ , nous aboutissons alors à la même conclusion  $g_{13} = g_{31} = 0$ .**
3. **Démontrons maintenant que  $g_{23} = g_{32} = 0$ .**

Toujours en utilisant cette méthode d'encadrement, nous cherchons maintenant la valeur des coefficients  $g_{23}$  et  $g_{32}$ .

$$\begin{cases} 2(q-2)(|g_{23}|^2 - 1) + 1 \geq 1 \\ 2(q-2)(|g_{32}|^2 - 1) + 1 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |g_{23}| \leq |g_{32}| \\ |g_{23}| \geq |g_{32}| \end{cases} \Rightarrow |g_{23}| = |g_{32}|$$

Alors

$$\begin{cases} |g_{23}| = |g_{32}| = 1 \\ g_{13} = g_{12} = 0 \end{cases}$$

Supposons que  $|g_{23}| = |g_{32}| = 1$ . D'après les contraintes (C) ainsi que le résultat précédent, i.e.  $g_{13} = g_{12} = 0$ , nous obtenons  $g_{22} = g_{33} = 0$ . Or, d'après le système (S') :

$$g_{11} \left( (q-2)(|g_{11}|^2 - 2) + 2 \right) = g_{22} + g_{33} \Rightarrow g_{11} = 0$$

Mais d'après le système (C) des contraintes et puisque  $g_{21} = g_{31} = 0$ , il est impossible que  $g_{11}$  soit nul car  $|g_{11}| = 1$ . Donc, nous avons démontré par l'absurde que  $g_{23} = g_{32} = 0$ .

4. **Finalement, nous montrons que  $g_{11} = g_{22} = g_{33}$ .**

Les coefficients  $g_{mn}$ ,  $m \neq n \in \{1, \dots, 3\}$  étant tous nuls, nous pouvons affirmer d'après (C) que les modules des coefficients  $g_{nn}$  sont unitaires :  $|g_{nn}| = 1$ . Le système (S') peut donc être réécrit sous la forme :

$$(S') \begin{cases} 2g_{11} = g_{22} + g_{33} \\ |g_{mn}| = \delta_{m,n} \end{cases}$$

où  $\delta_{m,n}$  représente le symbole de Kronecker.

Nous allons maintenant chercher les valeurs de  $g_{11}$ ,  $g_{22}$  et  $g_{33}$  qui résolvent le système (S) sous les contraintes  $\mathbf{G}^H \mathbf{G} = \mathbf{I}_3$ .

Ainsi,  $g_{22} + g_{33} = 2g_{11} \Rightarrow |g_{22} + g_{33}| = 2|g_{11}| = 2$ .

On pose  $g_{nn} = e^{j\Phi_n}$ , ainsi :

$$|g_{22} + g_{33}|^2 = 4 \Leftrightarrow |g_{22}|^2 + |g_{33}|^2 + 2\cos(\Phi_2 - \Phi_3) = 4 \Leftrightarrow 1 + \cos(\Phi_2 - \Phi_3) = 2 \Leftrightarrow \Phi_2 = \Phi_3$$

Donc  $g_{22} = g_{33} \Rightarrow g_{11} = g_{22} = g_{33}$ .

Finalement,  $g_{11} = g_{22} = g_{33}$  et  $g_{mn} = 0$ ,  $m \neq n \in \{1, \dots, 3\}$  est le seul point stationnaire de la fonction de coût  $J$  sous les contraintes  $\mathbf{G}^H \mathbf{G} = \mathbf{I}_3$ .

**Propriété B.2.2** *Ce point stationnaire correspond à l'unique minimum du critère  $J$  sous la contrainte  $\mathbf{G}^H \mathbf{G} = \mathbf{I}_3$ .*

**Preuve B.2.2** *Nous allons maintenant vérifier que ce point correspond bien à un minimum local. Pour cela nous allons étudier le signe des valeurs propres de la matrice Hessienne.*

*Les blocs de la matrice Hessienne  $\mathfrak{H}_g L$  valent :*

$$\nabla_g(\nabla_g J)^T = \begin{pmatrix} 2q+4 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2(4-q) & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(4-q) & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5-2q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 2q+1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5-2q & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 5-2q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 5-2q & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1+2q \end{pmatrix}$$

$$\nabla_g(\nabla_g J)^T = \begin{pmatrix} 2g_{11}^2 q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2g_{22}^2 q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2g_{33}^2 q \end{pmatrix}$$

*Les valeurs propres de la matrice Hessienne au point stationnaire sont toutes nulles ou positives, celle-ci est donc semi-définie positive :*

$$\begin{cases} 0, \text{ d'ordre de multiplicité } 2 \\ 6 > 0, \text{ d'ordre de multiplicité } 1 \\ 9 - 2q > 0, \text{ d'ordre de multiplicité } 4 \\ -2(q - 3) > 0, \text{ d'ordre de multiplicité } 2 \\ -2(q - 2) > 0, \text{ d'ordre de multiplicité } 6 \\ 4q > 0, \text{ d'ordre de multiplicité } 2 \\ 2(3 + 2q) > 0, \text{ d'ordre de multiplicité } 1 \end{cases}$$

*L'unique point stationnaire, i.e.  $g_{11} = g_{22} = g_{33}$  et  $g_{mn} = 0$ ,  $m \neq n \in \{1, \dots, 3\}$  avec  $|g_{11}|^2 = |g_{22}|^2 = |g_{33}|^2 = 1$ , est donc un minimum du critère  $J$  sous  $\mathbf{G}^H \mathbf{G} = \mathbf{I}_3$ .*

En posant  $g_{11} = e^{j\Phi}$ , seule la matrice  $\mathbf{G}$  suivante permet de minimiser notre système :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} e^{j\Phi} & 0 & 0 \\ 0 & e^{j\Phi} & 0 \\ 0 & 0 & e^{j\Phi} \end{pmatrix}$$

Le critère proposé permet donc de retrouver, en sortie de l'égaliseur, les symboles dans le bon ordre et avec une rotation de phase près identique sur chacune des sorties.

## Annexe C

# Recherche des minima du critère $J_{Or}$

Nous allons montrer dans cette annexe que le critère  $J_{Or}$  que nous proposons, associé à la contrainte  $\mathbf{G}^H \mathbf{G} = \mathbf{I}_2$ , comporte deux minima, tous deux permettant de récupérer les sources non codées, soit dans l'ordre croissant avec la même ambiguïté de phase soit dans l'ordre décroissant avec la même ambiguïté de phase à  $\pi/2$  près. Ces minima sont récapitulés dans le tableau 3.3. Nous rappelons que le critère proposé prend la forme suivante :

$$\begin{cases} J_{Or} = \sum_{n=1}^4 (|t_n(k)|^2 - R)^2 \\ \text{sous } \mathbf{G}^H \mathbf{G} = \mathbf{I}_2 \end{cases}$$

avec

$$\mathbf{t}(k) = \mathbf{C}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{G}^H & 0 \\ 0 & \mathbf{G}^H \end{pmatrix} \mathbf{C} \mathbf{s}(k)$$

où  $\mathbf{C}$  est la matrice de codage du code d'Or et  $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$ .

### C.1 Changement de variable

Nous effectuons dans un premier temps le changement de variables suivant :

$$\begin{pmatrix} g_1'^* \\ g_4'^* \\ g_3'^* \\ g_2'^* \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\bar{\theta} & 0 & 0 & \theta \\ 0 & -\bar{\theta} & -j\theta & 0 \\ 0 & -\theta & -j\bar{\theta} & 0 \\ \theta & 0 & 0 & -\bar{\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11}^* \\ g_{21}^* \\ g_{12}^* \\ g_{22}^* \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{g}'^* = \mathbf{\Gamma} \mathbf{g}^*$$

En utilisant les expressions des matrices code d'Or et son inverse respectivement notées  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{C}^{-1}$  données au paragraphe 3.3.4, nous obtenons l'expression de la matrice  $\mathbf{G}'^H = \mathbf{C}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{G}^H & 0 \\ 0 & \mathbf{G}^H \end{pmatrix} \mathbf{C}$  :

$$\mathbf{G}'^H = \begin{pmatrix} g_1'^* & g_2'^* - g_1'^* & g_4'^* + g_3'^* & g_4'^* \\ g_2'^* - g_1'^* & g_2'^* & g_3'^* & -(g_3'^* + g_4'^*) \\ -j(g_3'^* + g_4'^*) & -jg_4'^* & g_1'^* & g_2'^* - g_1'^* \\ -jg_3'^* & -j(g_3'^* + g_4'^*) & g_2'^* - g_1'^* & g_2'^* \end{pmatrix}$$

Nous avons vu dans le paragraphe 3.4 que les points stationnaires sont obtenus en résolvant le système :

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{g}} J = 0, \\ \nabla_{\mathbf{g}^*} J = 0 \end{cases}$$

et que la nature de ces points est donnée par l'étude de la matrice Hessienne  $\mathfrak{H}_g J$  définie au paragraphe 3.4.

Afin de déterminer le système à résoudre, nous exprimons les deux gradients complexes  $\nabla_{\mathbf{g}} J$  et  $\nabla_{\mathbf{g}^*} J$  en fonction des variables  $g'_n$ ,  $n \in \{1, \dots, 4\}$  :

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{g}} J &= \frac{\partial J}{\partial g'_1} \nabla_{\mathbf{g}} g'_1 + \frac{\partial J}{\partial g'_4} \nabla_{\mathbf{g}} g'_4 + \frac{\partial J}{\partial g'_3} \nabla_{\mathbf{g}} g'_3 + \frac{\partial J}{\partial g'_2} \nabla_{\mathbf{g}} g'_2 = 0 \\ &= \Gamma_1 \frac{\partial J}{\partial g'_1} + \Gamma_2 \frac{\partial J}{\partial g'_4} + \Gamma_3 \frac{\partial J}{\partial g'_3} + \Gamma_4 \frac{\partial J}{\partial g'_2} = 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{g}^*} J &= \frac{\partial J}{\partial g'_1} \nabla_{\mathbf{g}^*} g'_1 + \frac{\partial J}{\partial g'_4} \nabla_{\mathbf{g}^*} g'_4 + \frac{\partial J}{\partial g'_3} \nabla_{\mathbf{g}^*} g'_3 + \frac{\partial J}{\partial g'_2} \nabla_{\mathbf{g}^*} g'_2 = 0 \\ &= \Gamma_1^* \frac{\partial J}{\partial g'_1} + \Gamma_2^* \frac{\partial J}{\partial g'_4} + \Gamma_3^* \frac{\partial J}{\partial g'_3} + \Gamma_4^* \frac{\partial J}{\partial g'_2} = 0 \end{aligned}$$

Les vecteurs gradients  $\nabla_{\mathbf{g}} J$  et  $\nabla_{\mathbf{g}^*} J$  sont donc une combinaison linéaire des vecteurs  $\Gamma_n$ ,  $n \in \{1, \dots, 4\}$ . Ces vecteurs étant mutuellement indépendants, les gradients  $\nabla_{\mathbf{g}} J$  et  $\nabla_{\mathbf{g}^*} J$  s'annulent si et seulement si les dérivées partielles  $\frac{\partial J}{\partial g'_n}$  et  $\frac{\partial J}{\partial g_n}$ ,  $n \in \{1, \dots, 4\}$  sont toutes nulles. Ainsi, rechercher les points stationnaires revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} \nabla'_{\mathbf{g}} J = 0, \\ \nabla'_{\mathbf{g}^*} J = 0 \end{cases}$$

Avec  $\nabla_{\mathbf{g}'} = \left( \frac{\partial}{\partial g'_1}, \frac{\partial}{\partial g'_4}, \frac{\partial}{\partial g'_3}, \frac{\partial}{\partial g'_2} \right)^T$ , puisque  $\nabla_{\mathbf{g}} J = \Gamma \nabla_{\mathbf{g}'} J$ , la matrice Hessienne  $\mathfrak{H}_g J$  est congruente avec la matrice Hessienne  $\mathfrak{H}_{g'} J$  :

$$\mathfrak{H}_g J = \begin{pmatrix} \Gamma^* & 0 \\ 0 & \Gamma \end{pmatrix} \mathfrak{H}_{g'} J \begin{pmatrix} \Gamma^T & 0 \\ 0 & \Gamma^H \end{pmatrix}$$

avec

$$\mathfrak{H}_{g'} J = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{g}'}^* \left( \nabla_{\mathbf{g}'}^T J \right) & \nabla_{\mathbf{g}'}^* \left( \nabla_{\mathbf{g}'}^H J \right) \\ \nabla_{\mathbf{g}'} \left( \nabla_{\mathbf{g}'}^T J \right) & \nabla_{\mathbf{g}'} \left( \nabla_{\mathbf{g}'}^H J \right) \end{pmatrix}$$

On en conclut que si  $\mathfrak{H}_{g'} J$  est définie positive alors  $\mathfrak{H}_g J$  l'est aussi. Ainsi, l'étude des points stationnaires se fera à partir de la matrice Hessienne  $\mathfrak{H}_{g'} J$ .

Nous devons maintenant exprimer la contrainte  $\mathbf{G}^H \mathbf{G} = \mathbf{I}_2$  uniquement en fonction de la matrice  $\mathbf{G}'$  :

$$\mathbf{G}'^H \mathbf{G}' = \mathbf{C}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{G}^H & 0 \\ 0 & \mathbf{G}^H \end{pmatrix} \mathbf{C} \mathbf{C}^H \begin{pmatrix} \mathbf{G} & 0 \\ 0 & \mathbf{G} \end{pmatrix} (\mathbf{C}^H)^{-1}$$

or  $\mathbf{C} \mathbf{C}^H = \mathbf{I}_4$  et  $\begin{pmatrix} \mathbf{G}^H & 0 \\ 0 & \mathbf{G}^H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{G} & 0 \\ 0 & \mathbf{G} \end{pmatrix} = \mathbf{I}_4$  d'après la contrainte.

Ainsi,  $\mathbf{G}'^H \mathbf{G}' = \mathbf{I}_4$ , nous cherchons donc à minimiser :

$$\begin{cases} J_{Or} = \sum_{n=1}^{N_t} E[|t_n(k)|^2 - R]^2 \\ \text{sous } \mathbf{G}'^H \mathbf{G}' = \mathbf{I}_4 \end{cases}$$

Nous rappelons que les sources  $s(k)$  sont supposées être statistiquement indépendantes, qu'elles ont une puissance unitaire, i.e.  $\sigma_s^2 = E[|s|^2] = 1$ , et on pose  $q = E[|s|^4]$ . En développant la fonction de coût et en utilisant ses propriétés statistiques, on obtient l'expression de  $J_{Or}$  en fonction des variables  $g'_n$ ,  $n \in \{1, \dots, 4\}$  :

$$\begin{aligned} J_{Or}(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2) = & 2q [|g'_1|^4 + 2|g'_2 - g'_1|^4 + 2|g'_4 + g'_3|^4 + |g'_4|^4 + |g'_2|^4 + |g'_3|^4] + \\ & 8 [|g'_2 - g'_1|^2 (|g'_1|^2 + 2|g'_4 - g'_3|^2 + |g'_4|^2 + |g'_2|^2 + |g'_3|^2) + \\ & |g'_4 + g'_3|^2 (|g'_1|^2 + |g'_4|^2 + |g'_2|^2 + |g'_3|^2) + |g'_1|^2 |g'_4|^2 + |g'_2|^2 |g'_3|^2] - \\ & 4q [|g'_1|^2 + 2|g'_2 - g'_1|^2 + 2|g'_4 + g'_3|^2 + |g'_4|^2 + |g'_2|^2 + |g'_3|^2] + 4q^2 \end{aligned}$$

## C.2 Étude des points stationnaires

Nous cherchons maintenant les points stationnaires de notre système. Dans un premier temps nous exprimons les dérivées du critère par rapport aux variables, puis à l'aide des contraintes, nous cherchons les points qui annulent ces dérivées. La matrice Hessienne en ces points stationnaires est finalement étudiée afin de déterminer si ce sont des minima. Les dérivées partielles du critère par rapport aux 4 variables  $g'_n$  sont données par :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial g'_1} = \left( \frac{\partial J}{\partial g'_1} \right)^* &= \frac{g'_1}{8} [4q (|g'_1|^2 + 2|g'_2 - g'_1|^2 - 3) + (|g'_1|^2 + |g'_2 - g'_1|^2 + 3|g'_4 + g'_3|^2 + 2|g'_4|^2 + |g'_2|^2 + |g'_3|^2)] \\ &\quad - g'_2 [8q (|g'_2 - g'_1|^2 - 1) + 8 (|g'_1|^2 + 2|g'_4 + g'_3|^2 + |g'_4|^2 + |g'_2|^2 + |g'_3|^2)] \\ \frac{\partial J}{\partial g'_4} = \left( \frac{\partial J}{\partial g'_4} \right)^* &= \frac{g'_4}{8} [4q (|g'_4|^2 + 2|g'_4 + g'_3|^2 - 3) + (2|g'_1|^2 + 3|g'_2 - g'_1|^2 + |g'_4 + g'_3|^2 + |g'_4|^2 + |g'_2|^2 + |g'_3|^2)] \\ &\quad + g'_3 [8q (|g'_4 + g'_3|^2 - 1) + 8 (|g'_1|^2 + 2|g'_2 - g'_1|^2 + |g'_4|^2 + |g'_2|^2 + |g'_3|^2)] \\ \frac{\partial J}{\partial g'_3} = \left( \frac{\partial J}{\partial g'_3} \right)^* &= \frac{g'_3}{8} [4q (|g'_3|^2 + 2|g'_4 + g'_3|^2 - 3) + (2|g'_1|^2 + 3|g'_2 - g'_1|^2 + |g'_4 + g'_3|^2 + |g'_4|^2 + |g'_2|^2 + |g'_3|^2)] \\ &\quad + g'_4 [8q (|g'_4 + g'_3|^2 - 1) + 8 (|g'_1|^2 + 2|g'_2 - g'_1|^2 + |g'_4|^2 + |g'_2|^2 + |g'_3|^2)] \\ \frac{\partial J}{\partial g'_2} = \left( \frac{\partial J}{\partial g'_2} \right)^* &= \frac{g'_2}{8} [4q (|g'_2|^2 + 2|g'_2 - g'_1|^2 - 3) + (|g'_1|^2 + |g'_2 - g'_1|^2 + 3|g'_4 + g'_3|^2 + 2|g'_4|^2 + |g'_2|^2 + |g'_3|^2)] \\ &\quad - g'_1 [8q (|g'_2 - g'_1|^2 - 1) + 8 (|g'_1|^2 + 2|g'_4 + g'_3|^2 + |g'_4|^2 + |g'_2|^2 + |g'_3|^2)] \end{aligned} \right.$$

Les contraintes sont regroupées dans le système (C) :

$$(C) \begin{cases} |g'_1|^2 + |g'_2 - g'_1|^2 + |g'_4 + g'_3|^2 + |g'_4|^2 = 1 \\ |g'_2|^2 + |g'_2 - g'_1|^2 + |g'_4 + g'_3|^2 + |g'_3|^2 = 1 \end{cases}$$

Nous obtenons les points stationnaires en résolvant le système (S) :

$$(S) \begin{cases} \frac{\partial J}{\partial g'_n} = 0, \quad n \in \{1, \dots, 4\} \\ \frac{\partial J}{\partial g'_n} = 0, \quad n \in \{1, \dots, 4\} \end{cases}$$

En utilisant le système des contraintes (C) et le système (S), on obtient le système (S') à résoudre :

$$(C), (S) \Rightarrow (S') \begin{cases} g'_1 [(1 - |g'_1|^2) + 2(1 - |g'_2 - g'_1|^2)] = 2g'_2 (1 - |g'_2 - g'_1|^2) \\ g'_2 [(1 - |g'_2|^2) + 2(1 - |g'_2 - g'_1|^2)] = 2g'_1 (1 - |g'_2 - g'_1|^2) \\ g'_4 [(1 - |g'_4|^2) + 2(1 - |g'_4 + g'_3|^2)] = -2g'_3 (1 - |g'_4 + g'_3|^2) \\ g'_3 [(1 - |g'_3|^2) + 2(1 - |g'_4 + g'_3|^2)] = -2g'_4 (1 - |g'_4 + g'_3|^2) \end{cases}$$

**Propriété C.2.1** *Seuls deux points sont solutions du système (S') :*

$$\begin{cases} g'_1 = g'_2 = e^{j\Phi} \text{ et } g'_3 = g'_4 = 0 \\ \text{ou} \\ g'_4 = -g'_3 = e^{j\Psi} \text{ et } g'_2 = g'_1 = 0 \end{cases}$$

**Preuve C.2.1** *Puisque  $1 \leq q < 2$  pour des signaux de télécommunications numérique et  $0 \leq |g'_n|^2 \leq 1 \quad \forall n \in \{1, \dots, 4\}$ ,  $0 \leq |g'_2 - g'_1|^2 \leq 1$  et  $0 \leq |g'_4 + g'_3|^2 \leq 1$  d'après les contraintes, nous déduisons du système (S') les inégalités suivantes :*

$$\begin{cases} (1 - |g'_n|^2) + 2(1 - |g'_2 - g'_1|^2) \geq 2(1 - |g'_2 - g'_1|^2) \geq 0 \\ n \in \{1, 2\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |g'_1| \geq |g'_2| \\ |g'_1| \leq |g'_2| \end{cases} \Rightarrow |g'_1| = |g'_2|$$

et

$$\begin{cases} (1 - |g'_n|^2) + 2(1 - |g'_3 + g'_4|^2) \geq 2(1 - |g'_3 + g'_4|^2) \geq 0 \\ n \in \{3, 4\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |g'_4| \geq |g'_3| \\ |g'_4| \leq |g'_3| \end{cases} \Rightarrow |g'_4| = |g'_3|$$

Ce dernier résultat et l'argument des équations du système (S'), nous permettent d'obtenir les relations suivantes :

Du système (S), on déduit que :

$$\begin{cases} |g'_1| = |g'_2| \text{ et } \arg(g'_1) = \arg(g'_2) \Rightarrow g'_1 = g'_2 \\ \text{et} \\ |g'_3| = |g'_4| \text{ et } \arg(g'_3) = \arg(g'_4) + \pi \Rightarrow g'_3 = -g'_4 \end{cases}$$

Puisque  $g'_1 = g'_2$  et  $g'_3 = -g'_4$  alors  $|g'_2 - g'_1|^2 = 0$  et  $|g'_3 + g'_4|^2 = 0$ . Les égalités  $|g'_1| = |g'_2|$  et  $|g'_3| = |g'_4|$  sont donc vérifiées dans le système (S') si et seulement si :

$$g'_n = 0 \text{ ou } 1 - |g'_n|^2 = 0 \Leftrightarrow g'_n = 0 \text{ ou } |g'_n|^2 = 1$$

Du système des contraintes, nous pouvons en déduire :

$$|g'_1|^2 = |g'_2|^2 = 1 \Rightarrow g'_3 = g'_4 = 0 \text{ puisque } |g'_1|^2 + |g'_4|^2 = 1 \text{ et } |g'_2|^2 + |g'_3|^2 = 1$$

et

$$|g'_3|^2 = |g'_4|^2 = 1 \Rightarrow g'_1 = g'_2 = 0 \text{ puisque } |g'_1|^2 + |g'_4|^2 = 1 \text{ et } |g'_2|^2 + |g'_3|^2 = 1$$

En résumé, le critère  $J_{Or}$  à minimiser, sous la contrainte  $\mathbf{G}'^H \mathbf{G}' = \mathbf{I}$ , possède deux points stationnaires :

- Soit  $g'_1 = g'_2 = e^{j\Phi}$  et  $g'_3 = g'_4 = 0 \Rightarrow g_{11} = g_{22} = e^{j\Phi}$  et  $g_{12} = g_{21} = 0$
- Soit  $g'_4 = -g'_3 = e^{j\Psi}$  et  $g'_2 = g'_1 = 0 \Rightarrow g_{21} = -jg_{12} = e^{j\Psi}$  et  $g_{11} = g_{22} = 0$

**Propriété C.2.2** Ces points stationnaires correspondent aux deux minima de critère  $J$  sous la contrainte  $\mathbf{G}'^H \mathbf{G}' = \mathbf{I}_2$ .

**Preuve C.2.2** Nous allons maintenant vérifier que ces deux points sont bien des minima, pour cela nous calculons la matrice Hessienne  $\mathfrak{H}_{g'} J$  en chacun de ces points.

Soit  $g'_1 = g'_2$  et  $g'_3 = g'_4 = 0$ , les blocs de la matrice Hessienne sont alors :

$$\nabla_{g'}(\nabla_{g'} J)^T = \begin{pmatrix} 4(4-q) & 0 & 0 & 8(q-2) \\ 0 & 12(2-q) & 8(2-q) & 0 \\ 0 & 8(2-q) & 12(2-q) & 0 \\ 8(q-2) & 0 & 0 & 4(4-q) \end{pmatrix}$$

$$\nabla_{g'}(\nabla_{g'} J)^T = \begin{pmatrix} 4g_1'^2 q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4g_1'^2 q \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de  $\mathfrak{H}_{g'} J$  sont dans ce cas toutes positives ou nulles :

$$\begin{cases} 0, \text{ d'ordre de multiplicité } 1 \\ 8q > 0, \text{ d'ordre de multiplicité } 1 \\ -8(q-4) > 0, \text{ d'ordre de multiplicité } 1 \\ -20(q-2) > 0, \text{ d'ordre de multiplicité } 2 \\ -16(q-2) > 0, \text{ d'ordre de multiplicité } 1 \\ -4(q-2) > 0, \text{ d'ordre de multiplicité } 2 \end{cases}$$

Nous en concluons que  $\mathfrak{H}_{g'} J$  est définie positive et donc que le point  $g'_1 = g'_2$  et  $g'_3 = g'_4 = 0$  correspond à un minimum du problème d'optimisation.



Soit maintenant  $g'_3 = -g'_4$  et  $g'_2 = g'_1 = 0$  le deuxième point stationnaire, dans ce cas les blocs de la matrice Hessienne deviennent :

$$\nabla_{g'}(\nabla_{g'}J)^T = \begin{pmatrix} -12q + 24 & 0 & 0 & -8(q-2) \\ 0 & 4(4-q) & -8(q-2) & 0 \\ 0 & -8(q-2) & 4(4-q) & 0 \\ -8(q-2) & 0 & 0 & -12q + 24 \end{pmatrix}$$

$$\nabla_{g'}(\nabla_{g'}J)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4g_3'^2 q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4g_3'^2 q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont identiques à celles du premier point stationnaire, ainsi  $g'_3 = -g'_4$  et  $g'_2 = g'_1 = 0$  correspond aussi à un minimum du problème d'optimisation que nous avons proposé.

Pour conclure, la fonction de coût associée au code d'Or et à une contrainte d'orthogonalité possède deux minima. Nous rappelons que la matrice  $\mathbf{G}'$  permet de retrouver les symboles non-codés  $s(k)$  et que la matrice  $\mathbf{G}$  permet de retrouver les symboles codés  $x_n(k)$ . Les matrices  $\mathbf{G}'$  et  $\mathbf{G}$  correspondantes au premier point stationnaire permettent de retrouver respectivement les symboles non codés et codés dans le bon ordre (i.e. croissant) et avec la même phase :

$$\mathbf{G}'_1 = \begin{pmatrix} e^{j\Phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{j\Phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{j\Phi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{j\Phi} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{G}_1 = \begin{pmatrix} e^{j\Phi} & 0 \\ 0 & e^{j\Phi} \end{pmatrix}$$

Et les matrices  $\mathbf{G}'$  et  $\mathbf{G}$  correspondantes au deuxième point stationnaire permettent de retrouver respectivement les symboles non codés et codés dans l'ordre décroissant et avec une même phase à  $k\pi/2$  près. :

$$\mathbf{G}'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e^{j\Psi} \\ 0 & 0 & -e^{j\Psi} & 0 \\ 0 & -je^{j\Psi} & 0 & 0 \\ je^{j\Psi} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{G}_2 = \begin{pmatrix} 0 & e^{j\Psi} \\ -je^{j\Psi} & 0 \end{pmatrix}$$

## Annexe D

# Preuves des propriétés du chapitre 4

**Preuve D.0.3 (de la propriété 4.2.1)** Soit  $\mathbf{A} = \mathbf{I} - \frac{1}{N} \mathbf{1} \mathbf{1}^T$ , une matrice symétrique, ainsi  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$  et  $\mathbf{A}$  vérifie  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$  donc  $\mathbf{A}$  est un projecteur. Ainsi,  $\mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$ . Par conséquent, les matrices  $\tilde{\mathbf{C}}$  et  $\bar{\mathbf{C}}$  peuvent s'exprimer sous la forme :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{C}} &= \frac{1}{N} \tilde{\mathbf{P}}^T \tilde{\mathbf{P}} - \frac{1}{N} \tilde{\mathbf{P}}^T \mathbf{1} \frac{1}{N} \mathbf{1}^T \tilde{\mathbf{P}} \\ &= \frac{1}{N} \tilde{\mathbf{P}}^T (\mathbf{I} - \frac{1}{N} \mathbf{1} \mathbf{1}^T) \tilde{\mathbf{P}} \\ &= \frac{1}{N} \tilde{\mathbf{P}}^T \mathbf{A} \tilde{\mathbf{P}} \\ &= \frac{1}{N} \tilde{\mathbf{P}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \tilde{\mathbf{P}} \\ &= \frac{1}{N} [\mathbf{A} \tilde{\mathbf{P}}]^T [\mathbf{A} \tilde{\mathbf{P}}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{de même, } \bar{\mathbf{C}} &= \frac{1}{N} \bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{P}} - \frac{1}{N} \bar{\mathbf{P}}^T \mathbf{1} \frac{1}{N} \mathbf{1}^T \bar{\mathbf{P}} \\ &= \frac{1}{N} [\mathbf{A} \bar{\mathbf{P}}]^T [\mathbf{A} \bar{\mathbf{P}}] \end{aligned}$$

Puisque  $\tilde{\mathbf{C}} = \frac{1}{N} [\mathbf{A} \tilde{\mathbf{P}}]^T [\mathbf{A} \tilde{\mathbf{P}}]$  et  $\bar{\mathbf{C}} = \frac{1}{N} [\mathbf{A} \bar{\mathbf{P}}]^T [\mathbf{A} \bar{\mathbf{P}}]$ , les matrices  $\tilde{\mathbf{C}}$  et  $\bar{\mathbf{C}}$  sont donc symétriques, semi-définies positives et  $\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}}$  aussi. Par définition nous obtenons  $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{(2N_t)^2}$ ,  $\mathbf{y}^T (\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}}) \mathbf{y} \geq 0$ .

**Preuve D.0.4 (de la propriété 4.2.2)** Soit  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{16}$ ,  $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_{16})^T$ . En supposant que  $\mathbf{X} \in \ker(\tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}})$ ,  $\mathbf{X}$  peut s'exprimer sous la forme

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^6 \alpha_i \mathbf{e}'_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

Les composantes de  $\mathbf{X}$  vérifient donc :

$$\begin{aligned} x_1 &= x_6 = x_{11} = x_{16} = 0 \\ x_2 &= -x_5, \quad x_3 = -x_9, \quad x_4 = -x_{13}, \quad x_7 = -x_{10}, \quad x_8 = -x_{14}, \quad x_{12} = -x_{15} \end{aligned}$$

La matrice  $(4 \times 4)$   $\mathcal{X} = \text{vec}^{-1}(\mathbf{X})$  est donc anti-symétrique et s'exprime de la manière suivante :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{X}_2 & -\mathcal{X}_3 & -\mathcal{X}_4 \\ \mathcal{X}_2 & 0 & -\mathcal{X}_7 & -\mathcal{X}_8 \\ \mathcal{X}_3 & \mathcal{X}_7 & 0 & -\mathcal{X}_{12} \\ \mathcal{X}_4 & \mathcal{X}_8 & \mathcal{X}_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

Soit  $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$ , un vecteur ayant une structure de Kronecker avec  $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_1 \ \mathcal{T}_2 \ \mathcal{T}_3 \ \mathcal{T}_4)^T \in \mathbb{R}^4$ . La matrice  $\text{vec}^{-1}(\mathcal{T} \otimes \mathcal{T})$  est donc :

$$\text{vec}^{-1}(\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}) = \begin{pmatrix} \mathcal{T}_1^2 & \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 & \mathcal{T}_1\mathcal{T}_3 & \mathcal{T}_1\mathcal{T}_4 \\ \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 & \mathcal{T}_2^2 & \mathcal{T}_2\mathcal{T}_3 & \mathcal{T}_2\mathcal{T}_4 \\ \mathcal{T}_1\mathcal{T}_3 & \mathcal{T}_2\mathcal{T}_3 & \mathcal{T}_3^2 & \mathcal{T}_3\mathcal{T}_4 \\ \mathcal{T}_1\mathcal{T}_4 & \mathcal{T}_2\mathcal{T}_4 & \mathcal{T}_3\mathcal{T}_4 & \mathcal{T}_4^2 \end{pmatrix}$$

Ainsi, la matrice  $\text{vec}^{-1}(\mathcal{T} \otimes \mathcal{T})$  est symétrique, de dimension  $4 \times 4$  et ses valeurs sur la diagonale sont positives alors que  $\mathbf{X}$  est une matrice anti-symétrique. Les vecteurs  $\mathbf{X} \in \ker(\tilde{\mathcal{C}} + \bar{\mathcal{C}})$  n'ont donc pas une structure de Kronecker excepté le vecteur  $0_{\mathbb{R}^{16}}$ .

# Bibliographie

- [3GP07] Third generation partnership project ; technical specification group radio access network, multiple input multiple output in universal terrestrial radio access (utra) ; release 7, technical report 25.876 v7.1.0. Technical report, March 2007.
- [80204] Information technology telecommunication and informations exchange between systems- local and metropolitan area networks, part 16 : Air interface for fixed broadband wireless access systems. *IEEE Std 802.16-2004*, October 2004.
- [80207] Draft standard for information technology-telecommunications and information exchange between systems-local and metropolitan area networks-specific requirements-part 11 : Wireless lan medium access control (mac) and physical layer (phy) specifications : Amendment : Enhancements for higher throughput. *IEEE Draft Std P802.11n/D2.00*, February 2007.
- [ADS00] N. Al-Dhahir and A. H. Sayed. The finite-length multi-input multi-output MMSE-DFE. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 48(10) :961–976, October 2000.
- [Ala98] S. M. Alamouti. A simple transmit diversity technique for wireless communication. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 16(8) :1451–1458, October 1998.
- [AM04] T. Aboulnasr and K. Mayyas. A robust variable step-size LMS-type algorithm : analysis and simulations. *IEEE Transactions on signal processing*, 45 :631–639, 2004.
- [AMCHA02] K. Abed-Meraim, A. Chkeif, Y. Hua, and S. Attallah. On a class of orthonormal algorithms for principal and minor subspace tracking. *Journal of VLSI Signal Processing Systems*, 31 :57–70, May 2002.
- [And63] T.W. Anderson. Asymptotic theory for principal component analysis. *Journal. Math. Stat*, 34 :122–148, 1963.
- [Bad08] R. Badeau. Fast and stable YAST algorithm for principal and minor subspace tracking. *IEEE Trans. on signal processing*, 56(8), 2008.
- [Bra83] D. H. Brandwood. A complex gradient operator and its applications in adaptive array theory. *IEEE Proceeding Communications, Radar and Signal Processing*, 130 :11–16, February 1983.
- [BRV05] J.C. Belfiore, G. Rekaya, and E. Viterbo. The Golden code : A 2 x 2 full-rate space-time code with nonvanishing determinants. *IEEE transactions on information theory*, 51(4) :1432–1436, 2005.

- [BS95] A. J. Bell and T. J. Sejnowski. An information maximisation approach to blind separation and blind deconvolution. *Neural Computation*, 7(6), 1995.
- [Car89] J.F. Cardoso. Source separation using higher order moments. *ICASSP*, pages 2109–2112, 1989.
- [Car92] J.F. Cardoso. Iterative techniques for blind source separation using only fourth-order cumulants. In *Proc. EUSIPCO*, pages 739–742, 1992.
- [Car97] J. F. Cardoso. Infomax and maximum likelihood for blind source separation. *IEEE Signal processing letters*, 4 :112–114, April 1997.
- [CAY<sup>+</sup>08] V. Choqueuse, S. Azou, K. Yao, L. Collin, and G. Burel. Modulation recognition for MIMO systems. *ATM Review*, 2008.
- [CED97] L. Castedo, C. J. Escudero, and A. Dapena. A blind signal separation method for multiuser communications. *IEEE Trans. Signal Processing*, 45 :1343–1348, May 1997.
- [CET<sup>+</sup>00] R.A. Casas, T.J. Endres, A. Touzni, C.R. Johnson Jr, and J.R. Treichler. *Signal Processing Advances in Wireless and Mobile Communications, Volume 1 : Trends in Channel Estimation and Equalization*, chapter Current approaches to blind decision feedback equalization. Prentice Hall, g.b. giannakis, y. hua, p. stoica, and l. tong, editors, signal processing advances edition, 2000.
- [Cho08] V. Choqueuse. *Interception des signaux issus de communications MIMO*. Phd thesis, Université de Bretagne Occidentale, 2008.
- [Com94] P. Comon. Independent component analysis, a new concept. *Signal Processing*, 36, 1994.
- [CS93] J.F. Cardoso and A. Souloumiac. Blind beamforming for non Gaussian signals. *IEEE Proceedings-F*, 140(6) :362–370, 1993.
- [CS96] J.F. Cardoso and A. Souloumiac. Jacobi angles for simultaneous diagonalization. *SIAM J. Mat. Anal. Appl.*, 17(4) :161–164, 1996.
- [CYC<sup>+</sup>08] V. Choqueuse, K. Yao, L. Collin, G. Burel, and A. Mansour. Blind ML recognition of STBC using gaussian approximation. *IEEE Transactions on Wireless Communication*, 2008.
- [CYCB08a] V. Choqueuse, K. Yao, L. Collin, and G. Burel. Blind detection of the number of communications signals by ica and ks tests. *IEEE ICASSP*, pages 2397–2400, 2008.
- [CYCB08b] V. Choqueuse, K. Yao, L. Collin, and G. Burel. Hierarchical space time block code recognition using correlation matrices. *IEEE Transactions on Wireless Communication*, 2008.
- [DAB00] Y. Deville, F. Abrard, and M. Benali. A new source separation concept and its validation on a preliminary speech enhancement configuration. In *Proceedings of CFA*, pages 610–613, September 2000.
- [DAMB00] M. O. Damen, K. Abed-Meraim, and J. C. Belfiore. A generalized sphere decoder for asymmetrical space-time communication architecture. *IEE Electronic Letters*, 36, January 2000.

- [DAMB01] M. O. Damen, K. Abed-Meraim, and J. C. Belfiore. Iterative qr detection for blast. *Wireless Personnal Communications*, 19(3) :179–192, December 2001.
- [DB00] Y. Deville and M. Benali. Differential source separation : concept and application to a criterion based on differential normalized kurtosis. *In Proceedings of EUSIPCO*, September 2000.
- [DCB00] M. O. Damen, A. Chkeif, and J. C. Belfiore. Lattice code decoder for space-time codes. *IEEE Communications Letters*, 4 :166–169, May 2000.
- [Dev99] Y. Deville. A source separation criterion based on signed normalized kurtosis. *Proceedings of the 4th International Workshop on Electronics, Control, Measurement and Signals (ECMS)*, pages 143–146, June 1999.
- [DG07a] S. Daumont and D. Le Guennec. Blind source separation with order recovery for MIMO system and an Alamouti or Tarokh space-time block coding scheme. *IEEE symp. on signal process. and information technology*, pages 437–442, December 2007.
- [DG07b] S. Daumont and D. Le Guennec. Séparation aveugle de source pour des systèmes mimo et un codage d’alamouti et de tarokh. *Majecstic*, October 2007.
- [DG08] S. Daumont and D. Le Guennec. Blind tracking of time-varying MIMO channel with Alamouti scheme in interception context. *ISWCS*, October 2008.
- [DG09a] S. Daumont and D. Le Guennec. Adaptive Analytical Simplified Constant Modulus Algorithm : A BSS algorithm for MIMO systems with time-varying environments. *European Association for Signal Processing*, August 2009.
- [DG09b] S. Daumont and D. Le Guennec. Adaptive Analytical MMA with time-varying MIMO channels and diversity in interception context. *IEEE International Conference on Digital Signal Processing*, July 2009.
- [DH97] S. C. Douglas and S. Haykin. On the relationship between blind deconvolution and blind source separation. *Proceedings Asilomar conf. on Signal, System and Computers*, 2 :1591–1595, November 1997.
- [DL95] N. Delfosse and P. Loubaton. Adaptive blind separation of independent sources : a deflation approach. *Signal Processing*, 45 :59–83, 1995.
- [DM08] X. Doukopoulos and G. Moustakides. Fast and stable subspace tracking. *IEEE Trans. on signal processing*, 56(4) :1452–1465, 2008.
- [Dou00] S.C. Douglas. Numerically-robust adaptive subspace tracking using Householdertransformations. *Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop*, pages 499–503, 2000.
- [EK02] M. Enescu and V. Koivunen. Time-varying channel tracking for space-time block coding. *Vehicular Technology Conference*, 1(294- 297) :10–13, January 2002.
- [ESK02] M. Enescu, M. Sirbu, and V. Koivunen. Adaptive equalization of time-varying MIMO channels. *Signal Processing*, 85 :81–93, January 2002.

- [FGVW99] C.J. Foschini, G. D. Golden, R.A. Valenzuela, and P.W. Wolniansky. Simplified processing for wireless communication at high spectral efficiency. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 17(11) :1841–1852, November 1999.
- [Fos96] G. J. Foschini. Layered space-time architecture for wireless communication in a fading environment when using multiple antennas. *Bell Labs Technical Journal*, 1(2) :41–59, September 1996.
- [GFVW99] G.D. Golden, C.J. Foschini, R.A. Valenzuela, and P.W. Wolniansky. Detection algorithm and initial laboratory results using V-BLAST. *Electronics Letters*, 35(1) :14–15, January 1999.
- [GL86] R. Gooch and J. Lundell. The CM array : An adaptive beamformer for constant modulus signals. *ICASSP*, (2523-2526), April 1986.
- [GL90] M. Gaeta and J.L. Lacoume. Source separation without a priori knowledge : the maximum likelihood solution. *IEEE Transactions on Signal Processing*, pages 621–624, 1990.
- [GLC96] J. Grouffaud, P. Larzabal, and H. Clergeot. Some properties of ordered eigenvalues of a wishart matrix : Application in detection test and model order selection. *IEEE ICASSP*, 5 :2465–2468, 1996.
- [God80] D.N. Godard. Self-recovering equalization and carrier tracking in two-dimensional data communication systems. *IEEE Trans. on Communications*, 28(1867-1875), November 1980.
- [GP02] A. Goupil and J. Palicot. Constant norm algorithms class. *Proc. EUSIPCO*, September 2002.
- [GP07] A. Goupil and J. Palicot. New algorithms for blind equalization : The constant norm algorithm family. *Proc. EUSIPCO*, 55(4) :1436–1444, April 2007.
- [Hsu82] F.M. Hsu. Square root Kalman filtering for high-speed data received over fading dispersive HF channels. *IEEE Transactions on Information Theory*, 28(5) :753–763, 1982.
- [Hua04] Y. Hua. Asymptotical orthonormalization of subspace matrices without square root. *IEEE Signal Processing Magazine*, 21(4) :56–61, July 2004.
- [IG07] A. Ikhlef and D. Le Guennec. A Simplified Constant Modulus Algorithm for Blind Recovery of MIMO QAM and PSK Signals : A Criterion with Convergence Analysis. *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking*, 2007.
- [Ikh08] A. Ikhlef. *Séparation aveugle de sources dans les systèmes de communication MIMO*. Phd thesis, Université de Rennes 1, 2008.
- [IMG07a] A. Ikhlef, K. Abed Meraim, and D. Le Guennec. A fast blind adaptive separation algorithm using multiuser kurtosis maximization criterion. *In IEEE. SPAWC*, June 2007.
- [IMG07b] A. Ikhlef, K. Abed Meraim, and D. Le Guennec. A new blind adaptive signal separation and equalization algorithm for MIMO convolutive systems. *In IEEE Statistical Signal Processing Workshop*, August 2007.

- [Jak74] W. C. Jakes. *Microwave mobile communication*. NY : Wiley, 1974.
- [Jam69] A.T James. Tests of equality of latent roots of the covariance matrix. *Multivariate Analysis*, pages 205–217, 1969.
- [JHH04] J Jusak, Z Hussain, and R Harris. Performance of variable step-size dithered signed error CMA for blind equalization . *IEEE TENCON*, pages 684–687, 2004.
- [Jon95] D.L. Jones. A normalized constant-modulus algorithm. *Signals, Systems and Computers*, 1 :694–697, November 1995.
- [KFSW02] C. Komninakis, C. Fragouli, A. H. Sayed, and R. D. Wesel. Multi-input multi-output fading channel tracking and equalization using kalman estimation. *IEEE TRANSACTIONS ON SIGNAL PROCESSING*, 50(5) :1065–1076, May 2002.
- [KJ04] R.H. Kwong and E.W. Johnston. A variable step size LMS algorithm. *IEEE Transactions on signal processing*, 40 :1633–1642, 2004.
- [Law56] D. N. Lawley. Tests of significance for the latent roots of covariance and correlation matrices. *IEEE ICASSP*, 43 :128–136, 1956.
- [LC99] A. Lambotharan and J. Chambers. On the surface characteristics of a mixed constant modulus and cross-correlation criterion for the blind equalization of a MIMO channel. *Signal Processing*, 74 :209–216, April 1999.
- [LL98] J.-C. Lin and L.-S. Lee. A modified blind equalization technique based on a constant modulus algorithm. *IEEE Int. Conf. on Comm.*, 1 :344–348, 1998.
- [LNCX04] Yuxin Chen Le-Ngoc, T. Champagne, and B. Changjiang Xu. Recursive least squares constant modulus algorithm for blind adaptive array. *A Stochastic Approximation Method*, 52(5) :1452–1456, May 2004.
- [LR93] P. Loubaton and P. Regalia. Blind deconvolution of multivariate signals : a deflation approach. *In Proceedings of ICC*, pages 1160–1164, June 1993.
- [LT83] M. G. Larimore and J. R. Treichler. Convergence behavior of the constant modulus algorithm. *Proc. IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech, Signal Processing*, 1 :13–16, 1983.
- [MCG97] E. Moulines, J. F. Cardoso, and E. Gassiat. Maximum likelihood for blind separation and deconvolution of noisy signals using mixture models. *Proceedings of ICASSP*, 4 :3617–3620, April 1997.
- [MKO99] A. Mansour K. Matsuoka M. Kawamoto, A. K. Barros and N. Ohnishi. Real world blind separation of convolved non-stationary signals. *Proceedings of ICA*, pages 11–15, January 1999.
- [Pap]
- [Pap00] C.B. Papadias. Globally convergent blind source separation based on a multiuser kurtosis maximization criterion. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 48(12) :3508–3519, December 2000.
- [PGJ92] D. T. Pham, Ph. Garat, and C. Jutten. Separation of a mixture of independent sources through a maximum likelihood approach. *In Signal processing VI*, pages 771–774, 1992.



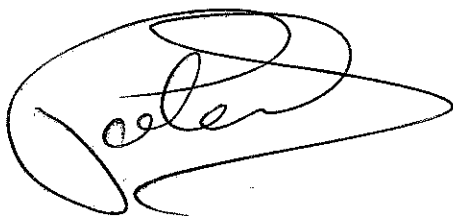
- [PP97] C. B. Papadias and A. J. Paulraj. A constant modulus algorithm for multiuser signal separation in presence of delay spread using antenna arrays. *IEEE Signal Processing letters*, 4(6) :178–181, June 1997.
- [RM51] H. Robbins and S. Monroe. A Stochastic Approximation Method. *A Stochastic Approximation Method*, 22 :400–407, September 1951.
- [RO05] D. Le Ruyet and B. Ozbek. Systèmes MIMO et codage spatio-temporel. *Revue de l'électricité et de l'électronique*, (4), 2005.
- [RS00] M. Rupp and A. H. Sayed. On the convergence of blind adaptive equalizers for constant-modulus signals. *IEEE Trans. Commun.*, 48 :795–803, May 2000.
- [SBS00] A. Swami, S. Barbarossa, and B.M. Sadler. Blind source separation and signal classification. *Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, 2 :1181–1191, 2000.
- [SS00] D. W. E. Schobben and P. C. W. Sommen. On the indeterminacies of convolutive blind signal separation based on second order statistics. *Proceedings of the 2nd International Workshop of ICA*, 1 :215–218, 2000.
- [SW90] O. Shalvi and E. Weinstein. New criteria for blind deconvolution of non minimum phase systems (channels). *IEEE Trans. Information Theory*, 36(2) :312–321, 1990.
- [SW07] Y.Bar-Ness S.Miao and S. Wei. STBC and BLAST MIMO modulation recognition. *GLOBECOM 2007*, pages 3034–3039, 2007.
- [SWC02] P. Sansrimahachai, D.B. Ward, and A.G. Constantinides. Blind source separation for BLAST. *Digital Signal Processing*, 1 :139–142, 2002.
- [TF99] A. Touzni and I. Fijalkow. Minima du critère Module Constant pour un canal AR. *In Actes du 17ème colloque GRETSI*, pages 1161–1164, September 1999.
- [TJC99a] V. Tarokh, H. Jafarkhani, and A.R. Calderbank. Space-time block codes from orthogonal designs. *IEEE Transactions on Information Theory*, 45(5) :1456–1467, July 1999.
- [TJC99b] V. Tarokh, H. Jafarkhani, and A.R. Calderbank. Space-time block coding for wireless communications : performance results. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 17(3) :451–460, March 1999.
- [Tug97] J. K. Tugnait. Identification and deconvolution of multichannel linear non-gaussian processes using higher order statistics and inverse filter criteria. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 45(3) :658–672, March 1997.
- [VDV01] A.J. Van Der Veen. Asymptotic properties of the algebraic constant modulus algorithm. *IEEE Int. Conf. on Acoust., Speech, and Signal Process.*, 49 :1796–1807, 2001.
- [VDV05] A.J. Van Der Veen. An adaptive version of the algebraic constant modulus algorithm. *IEEE Int. Conf. on Acoust., Speech, and Signal Process.*, 4 :873–876, 2005.
- [VLLS05] A. Van Der Veen, A. Leshem, J. Li, and P. Stoica. *Robust adaptive beamforming*, chapter 6 : Constant Modulus Beamforming. Wiley InterScience, 2005.

- [VP96] A. Van Der Veen and A. Paulraj. An analytical constant modulus algorithm. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 44(5) :1136–1157, May 1996.
- [WFGV98] P.W. Wolniansky, G.J. Foschini, G.D. Golden, and R.A. Valenzuela. V-blast : An architecture for realizing very high data rates over rich-scattering wireless channel. *International Symposium on Signals, Systems, and Electronics*, pages 295–300, September 1998.
- [Wig78] R. A. Wiggins. On minimum entropy deconvolution. *Geoexploration*, 16 :21–35, 1978.
- [WK85] M. Wax and T. Kailath. Detection of signals by information theoretic criteria. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 33(2) :387–392, 1985.
- [YR94] J. Yang and S. Roy. On joint transmitter and receiver optimization for Multiple-Input- Multiple-Onput (MIMO) transmission systems. *Neural Computation*, 42(12) :3221–3231, 1994.
- [ZB02] W. Zha and S.D. Blostein. Multiuser receivers that are robust to mismatch. *EURASIP Journal on Applied Signal Processing, Special Issue on Multiuser Detection and Blind Estimation*, 12 :1355–1364, December 2002.
- [ZC08a] V. Zarzoso and P. Comon. Optimal Step-Size Constant Modulus Algorithm. *IEEE Transactions on communications*, 56 :10–13, 2008.
- [ZC08b] V. Zarzoso and P. Comon. Modulation recognition for MIMO systems. *IEEE Transactions on Communications*, 56 :10–13, January 2008.
- [ZTJ99] H. H. Zeng, L. Tong, and Jr. C.R. Johnson. An analysis of constant modulus receivers. *IEEE Trans. Signal Processing*, 11 :2990–2999, November 1999.



VU :

Le Directeur de Thèse



VU :

Le Responsable de l'Ecole Doctorale

Université de Rennes 1  
ECOLE DOCTORALE MATISSE  
Le Directeur : Olivier BONNAUD

DT UR/2009/S/12 n°227  
VU pour autorisation de soutenance

Rennes, le 1<sup>er</sup> décembre 2009

Le Président de l'Université de Rennes 1

Guy CATHELINEAU

VU après soutenance pour autorisation de publication :

Le Président de Jury,

